

第 3 章

CIP-MOCCT 法による磁気流体力学方程式の解法

京都大学 上原 一浩

3.1 はじめに

この章では、CIP-MOCCT 法を用いて磁気流体力学方程式を解く方法を紹介する。CIP-MOCCT 法は、Kudoh et al. (1997) が開発し、CIP 法、MOC 法、CT 法という 3 つの数値計算法を組み合わせたものである。

CIP 法 (Cubic Interpolated Propagation / Constrained Interpolated Profile)

移流方程式を解く方法として Yabe & Aoki (1991) によって提案された高次精度差分法の一つである。物理量だけでなく、その微分値も独立変数として用いることにより、補間精度を向上させた。これまで流体力学など様々な分野で応用されている。

CT 法 (Constrained Transport)

Evans & Hawley (1988) によって開発された。磁場と電場を計算格子上の異なる位置で定義することにより、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を保証する。

MOC 法 (Method Of Characteristic)

特性曲線をもちいることで、磁気流体波を安定に解くことができるように考案された。(Stone & Norman 1992, Hawley & Stone 1995)

計算格子 計算格子の上で、各物理量は次の位置に定義されている。密度・温度などのスカラー量は、セルの中心 (zone center)、速度・磁場はセル境界面の中心 (face center)、電場はセルの辺の中心 (edge center) に置く。図 3.1 はセルの 8 分の 1 を切り取って描いたものである。このように、グリッドをずらして定義するような格子は、スタガード格子とよばれる。

これから、これらの手法の磁気流体方程式への応用をみていく。

3.2 磁気流体力学方程式の移流形式での表現

磁気流体力学の基礎方程式は次のようにあたえられる。

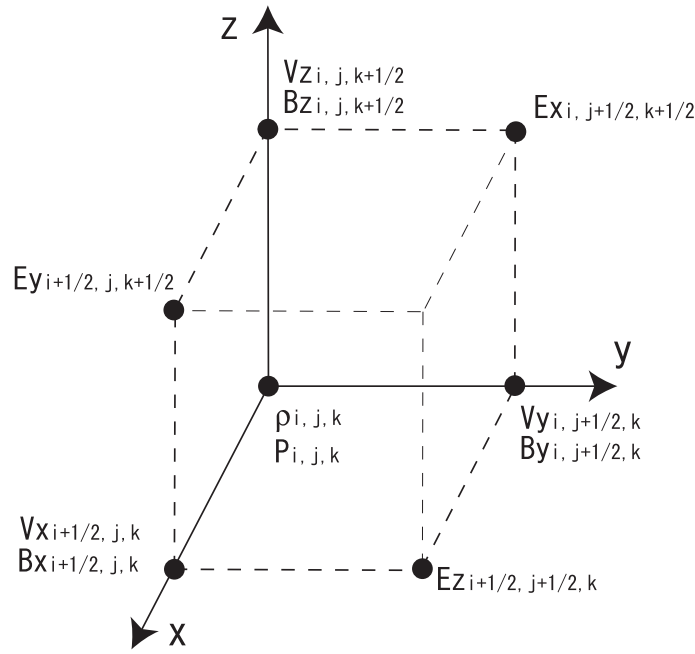


図 3.1: CIP-MOCCT 法における計算格子。密度・圧力はゾーンセンター、速度・磁場は、フェイスセンター、電場はエッジセンターとする (スタガード格子)。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{g} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.4)$$

流体計算の部分に CIP 法を適用するため、連続の式 (3.1)、運動方程式 (3.2)、エネルギー式 (3.3)、を移流項と非移流項にわけると。磁気張力項と誘導方程式の計算には MOC 法を用いる。 γ は比熱比、 $\mathbf{g}$ は、重力などの外力項である。

3.3 CIP 法

CIP 法の基礎的な部分については、Yabe & Aoki (1991) や天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクールのテキスト、より詳しいことは CIP 法 (矢部、内海、尾形 森北出版、2003) を参照。ここでは、1 次元で基本的な考え方を理解してから、3 次元へ拡張しその具体的な表式をあたえる。

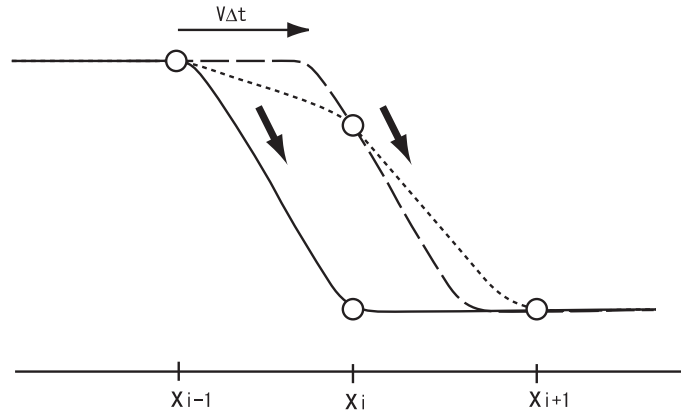


図 3.2: CIP 法の考え方。

3.3.1 CIP 法の基礎

CIP 法の特長は、物理量だけでなく微分量まで考慮にいれたスキームになっているところである。図 3.2 は、CIP 法の考え方を示したものである。いま、初期に実線のようなある物理量のプロファイルがあったとする。このプロファイルが移流方程式、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

にしたがって、移流速度 $v_x = \text{const} > 0$ で、 Δt の時間、移動するとき、厳密解は破線のようにになる。しかし、データは離散的なので、格子点上でしか情報は得られない。この離散的な情報から、セル内のプロファイルを単純に補間してしまうと、点線のようになり、厳密解からのずれが生じる。そこで、式 (3.5) の微分 ($g = \partial f / \partial x$) を考えてみる。

$$\frac{\partial g}{\partial t} + v_x \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

式 (3.5) と (3.6) は全く同じように移流方程式に従うことがわかる。この微分量も物理量と同様に移流させれば、格子点上では物理量とさらに微分量もわかることになる。もし格子点上でプロファイルの傾き (微分) の情報が加わると、格子点 x_i での傾きが修正され、より厳密解に近づくことがわかる。このように、CIP 法では微分の情報を使うことで計算の精度を向上させている。

具体的には、格子点 x_{i-1} 、 x_i の間を 3 次関数、

$$F(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad (3.7)$$

で補間する。ここで $X = x - x_i$ である。格子点上で、物理量 f_{i-1} 、 f_i 、微分量 g_{i-1} 、 g_i が連続であるという条件を課す。

$$F(x_i) = f_i = d \quad (3.8)$$

$$F(x_{i-1}) = f_{i-1} = -a\Delta x^3 + b\Delta x^2 - c\Delta x + d \quad (3.9)$$

$$\frac{dF(x_i)}{dx} = g_i = c \quad (3.10)$$

$$\frac{dF(x_{i-1})}{dx} = g_{i-1} = 3a\Delta x^2 - 2b\Delta x + c \quad (3.11)$$

これらの条件から、係数を求めることができる。

$$a = \frac{g_i + g_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{2(f_i - f_{i-1})}{\Delta x^3} \quad (3.12)$$

$$b = \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{\Delta x^2} + \frac{2g_i + g_{i-1}}{\Delta x} \quad (3.13)$$

格子点 x_i での時刻 Δt 後の値 $f_i(\Delta t)$ 、 $g_i(\Delta t)$ は、このプロファイルを x_i から $v_x \Delta t$ だけ遡ればよいから、

$$f_i(\Delta t) = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d \quad (3.14)$$

$$g_i(\Delta t) = 3a\xi^2 + 2b\xi + c \quad (3.15)$$

である。ここで、 $\xi = -v_x \Delta t$ である。 $v_x < 0$ の場合は、 $i - 1$ を $i + 1$ に $-\Delta x$ を Δx に置き換える。これは、風上 (移流の上流側) を判断して移流させていることになる。

3.3.2 3次元への拡張と流体力学への応用

これまででは、1次元、移流速度一定として考えてきた。つぎは、3次元かつ移流速度も一定でない場合について考えていく。式 (3.1)-(3.3) は一般的に以下のようにかける。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = S \quad (3.16)$$

ここで、 f は ρ 、 $\mathbf{v}$ 、 p をあらわす。 S は非移流項である。さらに、式 (3.16) を x 、 y 、 z で偏微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ = \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ = \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで、式 (3.16)、-(3.19) のうち、移流項と非移流項の部分の2段階にわけて計算することにする。すなわち、移流フェイズ、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.23)$$

非移流フェイズ、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = S \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.27)$$

の部分に分け、移流させたあとでその値を使って非移流項を解くという操作をする。(非移流項 → 移流項の順番も可能である)

3.3.3 移流項

以下では、 ρ 、 p の移流についてみていく。(v_x の場合は i を $i + 1/2$ 、 v_y の場合は j を $j + 1/2$ 、 v_z の場合は k を $k + 1/2$ に置き換える)

時刻 $t = n$ (移流前) での値を上付きの添字 n で、時刻 $t = n + a$ (移流後) での値を添字 $n + a$ であらわす。移流の間、速度が一定と考えると、時刻 $t = n + a$ での値は次のように与えられる。

$$f^{n+a}(x_i, y_j, z_k) = f^n(x_i - v_x \Delta t, y_i - v_y \Delta t, z_i - v_z \Delta t) \quad (3.28)$$

$v_x < 0$ 、 $v_y < 0$ 、 $v_z < 0$ のとき $(x_i - v_x \Delta t, y_i - v_y \Delta t, z_i - v_z \Delta t)$ は (x_i, y_j, z_k) と $(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1})$ を含むセル内にあるはずである。ここで、時刻 $t = n$ におけるこのセル内の物理量を CIP 法で補間し、 $f^n(x_i - v_x \Delta t, y_i - v_y \Delta t, z_i - v_z \Delta t)$ を決定する。

セル内の物理量は、

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) = & a_1 X^3 + a_2 Y^3 + a_3 Z^3 \\ & + a_4 X^2 Y + a_5 X^2 Z + a_6 Y^2 X + a_7 Y^2 Z + a_8 Z^2 X + a_9 X^2 Y + a_{10} X Y Z \\ & + a_{11} X^2 + a_{12} Y^2 + a_{13} Z^2 + a_{14} X Y + a_{15} X Z + a_{16} Y Z \\ & + a_{17} X + a_{18} Y + a_{19} Z + a_{20} \end{aligned} \quad (3.29)$$

で補間する。ここで、 $X = x - x_i$ 、 $Y = y - y_j$ 、 $Z = z - z_k$ である。式 (3.29) 中の 20 個の未知係数は、次のように決める。

各格子点上には、物理量とその微分量の計 4 つの値が与えられている。このうち、 (i, j, k) とこれに近い位置にある格子点 $(i + 1, j, k)$ 、 $(i, j + 1, k)$ 、 $(i, j, k + 1)$ では、物理量と微分量のすべての連続性を条件とする。一方、 (i, j, k) から遠い位置にある格子点 $(i + 1, j + 1, k)$ 、 $(i + 1, j, k + 1)$ 、 $(i, j + 1, k + 1)$ 、 $(i + 1, j + 1, k + 1)$ では、物理量の連続性だけを条件とする。このようにすると、20 個の条件がそろい係数を決定することができる。以下はその係数である。($f_{i,j,k}^n = f^n(x_i, y_j, z_k)$ のようにあらわすことにする)

$$a_1 = \frac{\partial}{\partial x} (f_{i+1,j,k} + f_{i,j,k}) / \Delta x^2 - 2d_i / \Delta x^3 \quad (3.30)$$

$$a_2 = \frac{\partial}{\partial y} (f_{i,j+1,k} + f_{i,j,k}) / \Delta y^2 - 2d_j / \Delta y^3 \quad (3.31)$$

$$a_3 = \frac{\partial}{\partial z} (f_{i,j,k+1} + f_{i,j,k}) / \Delta z^2 - 2d_k / \Delta z^3 \quad (3.32)$$

$$a_4 = \frac{\partial d_i}{\partial y} / \Delta x^2 - a_{14} / \Delta x \quad (3.33)$$

$$a_5 = \frac{\partial d_i}{\partial z} / \Delta x^2 - a_{15} / \Delta x \quad (3.34)$$

$$a_6 = \frac{\partial d_j}{\partial x} / \Delta y^2 - a_{14} / \Delta y \quad (3.35)$$

$$a_7 = \frac{\partial d_j}{\partial z} / \Delta y^2 - a_{16} / \Delta y \quad (3.36)$$

$$a_8 = \frac{\partial d_k}{\partial x} / \Delta z^2 - a_{15} / \Delta z \quad (3.37)$$

$$a_9 = \frac{\partial d_k}{\partial y} / \Delta z^2 - a_{16} / \Delta z \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} a_{10} = & \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} [f_{i+1,j+1,k+1} \\ & - a_1 \Delta x^3 - a_2 \Delta y^3 - a_3 \Delta z^3 - a_4 \Delta x^2 \Delta y - a_5 \Delta x^2 \Delta z \\ & - a_6 \Delta y^2 \Delta x - a_7 \Delta y^2 \Delta z - a_8 \Delta z^2 \Delta x - a_9 \Delta z^2 \Delta y \\ & - a_{11} \Delta x^2 - a_{12} \Delta y^2 - a_{13} \Delta z^2 - a_{14} \Delta x \Delta y - a_{15} \Delta x \Delta z - a_{16} \Delta y \Delta z \\ & - a_{17} \Delta x - a_{18} \Delta y - a_{19} \Delta z - a_{20}] \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$a_{11} = 3d_i / \Delta x^2 - \frac{\partial}{\partial x} (f_{i+1,j,k} + 2f_{i,j,k}) / \Delta x \quad (3.40)$$

$$a_{12} = 3d_j / \Delta y^2 - \frac{\partial}{\partial y} (f_{i,j+1,k} + 2f_{i,j,k}) / \Delta y \quad (3.41)$$

$$a_{13} = 3d_k / \Delta z^2 - \frac{\partial}{\partial z} (f_{i,j,k+1} + 2f_{i,j,k}) / \Delta z \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} a_{14} = & - (f_{i+1,j+1,k} - f_{i+1,j,k} - f_{i,j+1,k} + f_{i,j,k}) / \Delta x \Delta y \\ & + \frac{\partial d_j}{\partial x} / \Delta y + \frac{\partial d_i}{\partial y} / \Delta x \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} a_{15} = & - (f_{i+1,j,k+1} - f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k+1} + f_{i,j,k}) / \Delta x \Delta z \\ & + \frac{\partial d_k}{\partial x} / \Delta z + \frac{\partial d_i}{\partial z} / \Delta x \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} a_{16} = & - (f_{i,j+1,k+1} - f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k+1} + f_{i,j,k}) / \Delta y \Delta z \\ & + \frac{\partial d_j}{\partial z} / \Delta y + \frac{\partial d_k}{\partial y} / \Delta z \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$a_{17} = \frac{\partial}{\partial x} f_{i,j,k} \quad (3.46)$$

$$a_{18} = \frac{\partial}{\partial y} f_{i,j,k} \quad (3.47)$$

$$a_{19} = \frac{\partial}{\partial z} f_{i,j,k} \quad (3.48)$$

$$a_{20} = f_{i,j,k} \quad (3.49)$$

$$d_i = f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}, \quad d_j = f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k}, \quad d_k = f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k} \quad (3.50)$$

$v_x > 0$ のときは、 $i+1 \Rightarrow i-1$ 、 $\Delta x \Rightarrow -\Delta x$ 、 $v_y > 0$ のときは、 $j+1 \Rightarrow j-1$ 、 $\Delta y \Rightarrow -\Delta y$ 、 $v_z > 0$ のときは、 $k+1 \Rightarrow k-1$ 、 $\Delta z \Rightarrow -\Delta z$ としなければならない。

このように、セル内の物理量を補間することができたら、時刻 $t = n + a$ での値は次のように求められる。

$$\begin{aligned} f^{n+a} = & a_1 \xi^3 + a_2 \eta^3 + a_3 \zeta^3 \\ & + a_4 \xi^2 \eta + a_5 \xi^2 \zeta + a_6 \eta^2 \xi + a_7 \eta^2 \zeta + a_8 \zeta^2 \xi + a_9 \zeta^2 \eta + a_{10} \xi \eta \zeta \\ & + a_{11} \xi^2 + a_{12} \eta^2 + a_{13} \zeta^2 + a_{14} \xi \eta + a_{15} \xi \zeta + a_{16} \eta \zeta \\ & + a_{17} \xi + a_{18} \eta + a_{19} \zeta + a_{20} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{n+a}}{\partial x} = & 3a_1 \xi^2 + 2a_4 \xi \eta + 2a_5 \xi \zeta + a_6 \eta^2 + a_8 \zeta^2 \\ & + a_{10} \eta \zeta + 2a_{11} \xi + a_{14} \eta + a_{15} \zeta + a_{17} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{n+a}}{\partial y} = & 3a_2 \eta^2 + a_4 \xi^2 + 2a_6 \eta \xi + 2a_7 \eta \zeta + a_9 \zeta^2 \\ & + a_{10} \xi \zeta + 2a_{12} \eta + a_{14} \xi + a_{16} \zeta + a_{18} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{n+a}}{\partial z} = & 3a_3 \zeta^2 + a_5 \xi^2 + a_7 \eta^2 + 2a_8 \xi \zeta + 2a_9 \zeta \eta \\ & + a_{10} \xi \eta + 2a_{13} \zeta + a_{15} \xi + a_{16} \eta + a_{19} \end{aligned} \quad (3.54)$$

ここで、 $\xi = -v_x \Delta t$ 、 $\eta = -v_y \Delta t$ 、 $\zeta = -v_z \Delta t$ である。

3.3.4 非移流項

非移流項に関しては中心差分を用いて計算する。時刻 $t = n + a$ から $t = n + 1$ へは、次のようにして進められる。

$$f_{i,j,k}^{n+1} = f_{i,j,k}^{n+a} + S_{i,j,k} \Delta t \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{n+1} = & \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{n+a} + \frac{\left(f_{i+1,j,k}^{n+1} - f_{i-1,j,k}^{n+1} - f_{i+1,j,k}^{n+a} + f_{i-1,j,k}^{n+a} \right)}{2\Delta x} \\ & - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{n+a} \frac{\left(v_{x \ i+1/2,j,k}^{n+a} - v_{x \ i-1/2,j,k}^{n+a} \right) \Delta t}{\Delta x} \\ & - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j,k}^{n+a} \frac{\left(v_{y \ i+1/2,j,k}^{n+a} - v_{y \ i-1/2,j,k}^{n+a} \right) \Delta t}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j,k}^{n+a} \frac{\left(v_{x \ i+1/2,j,k}^{n+a} - v_{x \ i-1/2,j,k}^{n+a} \right) \Delta t}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j,k}^{n+1} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j,k}^{n+a} + \frac{\left(f_{i,j+1,k}^{n+1} - f_{i,j-1,k}^{n+1} - f_{i,j+1,k}^{n+a} + f_{i,j-1,k}^{n+a} \right)}{2\Delta y} \\
& - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{n+a} \frac{\left(v_{x \ i,j+1/2,k}^{n+a} - v_{x \ i,j-1/2,k}^{n+a} \right) \Delta t}{\Delta y} \\
& - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j,k}^{n+a} \frac{\left(v_{y \ i,j+1/2,k}^{n+a} - v_{y \ i,j-1/2,k}^{n+a} \right) \Delta t}{\Delta y} \\
& - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j,k}^{n+a} \frac{\left(v_{z \ i,j+1/2,k}^{n+a} - v_{z \ i,j-1/2,k}^{n+a} \right) \Delta t}{\Delta y}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j,k}^{n+1} &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j,k}^{n+a} + \frac{\left(f_{i,j,k+1}^{n+1} - f_{i,j,k-1}^{n+1} - f_{i,j,k+1}^{n+a} + f_{i,j,k-1}^{n+a} \right)}{2\Delta z} \\
& - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{n+a} \frac{\left(v_{x \ i,j,k+1/2}^{n+a} - v_{x \ i,j,k-1/2}^{n+a} \right) \Delta t}{\Delta z} \\
& - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j,k}^{n+a} \frac{\left(v_{y \ i,j,k+1/2}^{n+a} - v_{y \ i,j,k-1/2}^{n+a} \right) \Delta t}{\Delta z} \\
& - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j,k}^{n+a} \frac{\left(v_{z \ i,j,k+1/2}^{n+a} - v_{z \ i,j,k-1/2}^{n+a} \right) \Delta t}{\Delta z}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

ここで、微分量の非移流項にでてくる $S_{i,j,k}$ (の微分) は、式 (3.55) から

$$S_{i,j,k} = \left(f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^{n+a} \right) / \Delta t \tag{3.59}$$

で置き換えられている。また、 $v_{x \ i,j+1/2,k}^{n+a}$ のように、本来その格子上では定義されていない値は、つぎのように平均を使った。

$$v_{x \ i,j+1/2,k}^{n+a} = \frac{v_{x \ i-1/2,j,k}^{n+a} + v_{x \ i+1/2,j,k}^{n+a} + v_{x \ i-1/2,j+1,k}^{n+a} + v_{x \ i+1/2,j+1,k}^{n+a}}{4} \tag{3.60}$$

3 次元 Cartesian のときの ρ 、 v_x 、 p の差分式を具体的に書くと、

$$\rho_{i,j,k}^{n+1} = \rho_{i,j,k}^{n+a} + S_{\rho \ i,j,k} \Delta t \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
S_{\rho \ i,j,k} &= -\rho_{i,j,k}^{n+a} \left(\frac{v_{x \ i+1/2,j,k}^{n+a} - v_{x \ i-1/2,j,k}^{n+a}}{\Delta x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{v_{y \ i,j+1/2,k}^{n+a} - v_{y \ i,j-1/2,k}^{n+a}}{\Delta y} + \frac{v_{z \ i,j,k+1/2}^{n+a} - v_{z \ i,j,k-1/2}^{n+a}}{\Delta z} \right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$p_{i,j,k}^{n+1} = p_{i,j,k}^{n+a} + S_{p\ i,j,k} \Delta t \quad (3.63)$$

$$S_{p\ i,j,k} = -\gamma p_{i,j,k}^{n+a} \left(\frac{v_{x\ i+1/2,j,k}^{n+a} - v_{x\ i-1/2,j,k}^{n+a}}{\Delta x} + \frac{v_{y\ i,j+1/2,k}^{n+a} - v_{y\ i,j-1/2,k}^{n+a}}{\Delta y} + \frac{v_{z\ i,j,k+1/2}^{n+a} - v_{z\ i,j,k-1/2}^{n+a}}{\Delta z} \right) \quad (3.64)$$

$$v_{x\ i+1/2,j,k}^{n+1} = v_{x\ i+1/2,j,k}^{n+a} + S_{v_x\ i+1/2,j,k} \Delta t \quad (3.65)$$

$$S_{v_x\ i+1/2,j,k} = g_{x\ i+1/2} - \frac{1}{\rho_{i+1/2,j,k}^{n+a}} \frac{p_{i+1,j,k}^{n+a} - p_{i,j,k}^{n+a}}{\Delta x} - \frac{B_{y\ i+1/2,j,k}}{4\pi\rho_{i+1/2,j,k}^{n+a}} \frac{B_{y\ i+1,j,k} - B_{y\ i,j,k}}{\Delta x} - \frac{B_{z\ i+1/2,j,k}}{4\pi\rho_{i+1/2,j,k}^{n+a}} \frac{B_{z\ i+1,j,k} - B_{z\ i,j,k}}{\Delta x} + \frac{B_{y\ i+1/2,j,k}}{4\pi\rho_{i+1/2,j,k}^{n+a}} \frac{B_{x\ i+1/2,j+1/2,k}^s - B_{x\ i+1/2,j-1/2,k}^s}{\Delta y} + \frac{B_{z\ i+1/2,j,k}}{4\pi\rho_{i+1/2,j,k}^{n+a}} \frac{B_{x\ i+1/2,j,k+1/2}^s - B_{x\ i+1/2,j,k-1/2}^s}{\Delta z} \quad (3.66)$$

となる。ここで、 $\rho_{i+1/2,j,k}^{n+a} = (\rho_{i+1,j,k}^{n+a} + \rho_{i,j,k}^{n+a})/2$ 、 $B_{y\ i,j,k} = (B_{y\ i,j+1/2,k} + B_{y\ i,j-1/2,k})/2$ 、 $B_{y\ i+1/2,j,k} = (B_{y\ i+1,j,k} + B_{y\ i,j,k})/2$ 、 $B_{z\ i,j,k} = (B_{z\ i,j,k+1/2} + B_{z\ i,j,k-1/2})/2$ 、 $B_{z\ i+1/2,j,k} = (B_{z\ i+1,j,k} + B_{z\ i,j,k})/2$ である。磁気張力項の上付きの添字 s はMOC法で求められる値を使う(後述)。上付きの添字のない磁場の成分は、時刻 $t = n$ のものを使う。

3.4 CT法

CT法は、数値計算で解く方程式には現われてこない $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を保証する。磁場はセルの面の中心で、電場はセルの辺の中心で定義し(図3.1)、誘導方程式を中心差分で考えると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (B_{x\ i+1/2,j,k}^{n+1} - B_{x\ i+1/2,j,k}^n) &= -\frac{1}{\Delta y} (E_{z\ i+1/2,j+1/2,k} - E_{z\ i+1/2,j-1/2,k}) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta z} (E_{y\ i+1/2,j,k+1/2} - E_{y\ i+1/2,j,k-1/2}) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (B_{y\ i,j+1/2,k}^{n+1} - B_{y\ i,j+1/2,k}^n) &= -\frac{1}{\Delta z} (E_{x\ i,j+1/2,k+1/2} - E_{x\ i,j+1/2,k-1/2}) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} (E_{z\ i+1/2,j+1/2,k} - E_{z\ i-1/2,j+1/2,k}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (B_{z\ i,j,k+1/2}^{n+1} - B_{z\ i,j,k+1/2}^n) &= -\frac{1}{\Delta x} (E_{y\ i+1/2,j,k+1/2} - E_{y\ i-1/2,j,k+1/2}) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta y} (E_{x\ i,j+1/2,k+1/2} - E_{x\ i,j-1/2,k+1/2}) \end{aligned} \quad (3.69)$$

となる。ここで、式 (3.67)-(3.69) を足しあわせてみると、

$$\begin{aligned} & \frac{B_{x\ i+1/2,j,k}^{n+1} - B_{x\ i-1/2,j,k}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{B_{y\ i,j+1/2,k}^{n+1} - B_{y\ i,j-1/2,k}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{B_{z\ i,j,k+1/2}^{n+1} - B_{z\ i,j,k-1/2}^{n+1}}{\Delta z} \\ &= \frac{B_{x\ i+1/2,j,k}^n - B_{x\ i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{B_{y\ i,j+1/2,k}^n - B_{y\ i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} + \frac{B_{z\ i,j,k+1/2}^n - B_{z\ i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \end{aligned} \quad (3.70)$$

が導かれる。これにより、初期に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が満たされていれば、その後も数値誤差の範囲内で満たされることがわかる。したがって、格子を図 3.1 のように定義してさえいれば、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は自動的に満たされることになる。

3.5 MOC 法

3.5.1 誘導方程式

CT 法では、式 (3.67)-(3.69) の電場をどのように求めるかはなにも制限されていない。Stone & Norman (1992) は、特性曲線を用いて電場を求める方法を考案した。

ここからは、簡単のため 1.5 次元 ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$)、 $B_z = 0$ の場合を考える。1.5 次元での物理量が定義されている点は図 3.3 のようになる。このとき E_z は次のように書ける。

$$E_z = - (v_x B_y^* - v_y^* B_x) \quad (3.71)$$

ここで、上付きの添字 * は MOC 法で求められる値である。運動方程式、誘導方程式について、アルフベン波の特性曲線を使って B_y^* 、 v_y^* を見積もる方法を考える。誘導方程式の y 成分は、

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (v_x B_y) \quad (3.72)$$

のように書ける。一方、運動方程式の y 成分については、非圧縮を考慮すると ($\rho, v_x, B_x = \text{const}$)、

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (v_x v_y) \quad (3.73)$$

のようになる。式 (3.72) に $(4\pi\rho)^{-1/2}$ を掛けたものと、式 (3.73) の和と差をとると、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v_x + \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(v_y - \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) = 0 \quad (3.74)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v_x - \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(v_y + \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) = 0 \quad (3.75)$$

式 (3.74)、(3.75) は、アルフベン波の特性方程式である。この特性方程式のリーマン不変量を使って次の関係が導かれる。

$$(v_y^* - v_y^+) - \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^+}} (B_y^* - B_y^+) = 0 \quad (3.76)$$

$$(v_y^* - v_y^-) + \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^-}} (B_y^* - B_y^-) = 0 \quad (3.77)$$

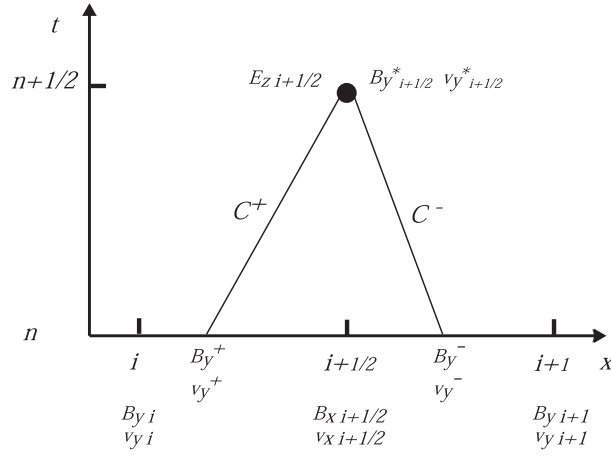


図 3.3: 1.5 次元での MOC 法。

ここで、添字 ± は、対応する特性曲線上の時刻 $t = n$ での値である式 (3.76)、(3.77) を v_y^* 、 B_y^* について解くと、

$$v_y^* = \frac{v_y^+ \sqrt{4\pi\rho^+} + v_y^- \sqrt{4\pi\rho^-} - B_y^+ + B_y^-}{\sqrt{4\pi\rho^+} + \sqrt{4\pi\rho^-}} \quad (3.78)$$

$$B_y^* = \frac{-v_y^+ + v_y^- + B_y^+ / \sqrt{4\pi\rho^+} + B_y^- / \sqrt{4\pi\rho^-}}{1/\sqrt{4\pi\rho^+} + 1/\sqrt{4\pi\rho^-}} \quad (3.79)$$

が得られる。ここでは、簡単のため $\rho^+ = \rho_i$ 、 $\rho^- = \rho_{i+1}$ とする。 $v_y^\pm$ 、 $B_y^\pm$ は、van Leer 法や CIP 法による補間などが使える。CIP 法に関しては、すでに述べた通りである。また、テスト計算において、単純に CIP 法を用いたコードでは数値振動がでたことなどから、まだまだ改良が必要であり、注意が必要である (表 3.4、図 3.10)。ここでは、安定に解くことができる van Leer 法を解説する。

van Leer 法 van Leer 法では、 $i - 1/2$ と $i + 1/2$ を 1 次補間する。

$$v_y^+ = \begin{cases} v_{y,i}^n + \frac{1}{2} \left(\Delta x - C_{i+1/2}^+ \Delta t \right) \frac{dv_y}{dx}_i & \text{if } C_{i+1/2}^+ \geq 0 \\ v_{y,i+1}^n - \frac{1}{2} \left(\Delta x + C_{i+1/2}^+ \Delta t \right) \frac{dv_y}{dx}_{i+1} & \text{if } C_{i+1/2}^+ < 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

ここで、 $C_{i+1/2}^+ = (v_x + B_x / \sqrt{4\pi\rho})_{i+1/2}$ はアルフベン波の特性速度、

$$\frac{dv_y}{dx}_i = \begin{cases} \frac{2\Delta v_{y,i-1/2} \Delta v_{y,i+1/2}}{\Delta v_{y,i-1/2} + \Delta v_{y,i+1/2}} & \text{if } \Delta v_{y,i-1/2} \Delta v_{y,i+1/2} \geq 0 \\ 0 & \text{if } \Delta v_{y,i-1/2} \Delta v_{y,i+1/2} < 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

$\Delta v_{y,i+1/2} = (v_{y,i+1} - v_{y,i}) / \Delta x$ である。また、 $C_{i+1/2}^+$ を求めるときの移流後に v_x^{n+a} を用いた。これは、磁気流体衝撃波管を解くときにより良い解を得るためである。 v_y^+ と同様にして、 v_y^- 、 B_y^+ 、 B_y^- も求めることができる。

3次元への拡張 基本的には、1.5次元のときと変わらない。3次元での電場は、

$$E_x = -(v_y^* B_z^* - v_z^* B_y^*) \quad (3.82)$$

$$E_y = -(v_z^* B_x^* - v_x^* B_z^*) \quad (3.83)$$

$$E_z = -(v_x^* B_y^* - v_y^* B_x^*) \quad (3.84)$$

のようにすべての項に添字 * がついているが、 v_y^* と同様の手順で求めることができる。

3.5.2 磁気張力項

MOC 法は、運動方程式中の磁気張力項の計算にも使う。たとえば、 v_y の運動方程式中の磁気張力項を取りだして考えてみる。

$$\frac{v_y^{n+1} - v_y^{n+a}}{\Delta t} = -\frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{B_y^s{}_{i+1/2} - B_y^s{}_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (3.85)$$

ここでは、 B_y^s が MOC 法で求められる値である。磁気張力項を計算するときは、 v_y^* を求めたときの特性速度 $C^\pm = v_x \pm B_x/\sqrt{4\pi\rho}$ の代わりに $C^\pm = \pm B_x/\sqrt{4\pi\rho}$ を用いる。それ以外は、 v_y^* を求めたときと同様である。これは、移流に関する部分はすでに CIP 法で考慮されているためである。

3.6 人工粘性

圧縮性流体の計算では、超音速になると衝撃波が発生する。衝撃波は数学的には不連続面であるが、実際は流体に粘性があるため、衝撃波は分子の平均自由行程程度の厚さを持っている。数値解析では、衝撃波の厚さを格子幅 Δx 程度で捉えることができればよいので、衝撃波のみに作用する人工的な粘性を圧力項に加えることで衝撃波を捉えることが可能になる。ここでは、von-Neumann 型と、Ogata & Yabe (1999) の人工粘性を紹介する。

3.6.1 von-Neumann 型人工粘性

von-Neumann 型人工粘性は、ランキン - ユゴニオ関係を基礎にしている。

$$\Delta p = \frac{\gamma + 1}{4} \rho_0 (\Delta v)^2 + \rho_0 |\Delta v| \left[\left(\frac{(\gamma + 1)^2}{4} (\Delta v)^2 + C_s^2 \right) \right]^{1/2} \quad (3.86)$$

$$\Delta v = v_1 - v_0 \quad (3.87)$$

ここで、 Δp と Δv は衝撃波面前後での圧力、速度の差、 C_s は音速である。添え字 0、1 はそれぞれ、衝撃波前面、後面での物理量をあらわしている。ランキン - ユゴニオ関係を満たすために、 Δp を数値粘性として圧力に加える。 $C_s \gg v$ 、 $C_s \ll v$ のときを考えると、式 (3.86) から粘性項 q は、以下のようになる。

$$q = \begin{cases} \alpha \left[-\rho C_s \Delta v + \frac{\gamma+1}{2} \rho (\Delta v)^2 \right] & \text{if } \Delta v \leq 0 \\ 0 & \text{if } \Delta v > 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

ここで、 α は無次元パラメータで、 $\alpha = 1$ が定義から考えられる値であるが、一般に 0.6 から 1.0 が用いられる。

これを3次元に拡張するときは、各方向において粘性項 q_x 、 q_y 、 q_z をそれぞれ Δv_x 、 Δv_y 、 Δv_z から計算し、運動方程式中の圧力項、エネルギー式に加える。

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p + q_x) \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (p + q_y) \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + q_z) \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} - (\gamma - 1) \left[q_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + q_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + q_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \quad (3.92)$$

この方法では、人工粘性は方向に依存してしまう。例えば点源爆発の場合、 $x(y, z)$ 軸方向とそうでない方向への衝撃波の伝播速度が変わってくる。(図 3.8、図 3.9)

3.6.2 Ogata & Yabe (1999) の人工粘性

Ogata & Yabe 1999 では、von-Neumann 型人工粘性における Δv_x 、 Δv_y 、 Δv_z を $(\nabla \cdot \mathbf{v}) \lambda$ で置き換えることで、方向に対する依存性を軽減した。

$$q_x = q_y = q_z = \alpha \left[-\rho C_s (\nabla \cdot \mathbf{v}) \lambda + \frac{\gamma + 1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \lambda^2 \right] \text{ if } \nabla \cdot \mathbf{v} < 0 \quad (3.93)$$

$$q_x = q_y = q_z = 0 \quad \text{if } \nabla \cdot \mathbf{v} > 0 \quad (3.94)$$

ここで、 λ は衝撃波の厚さであり、 $\lambda = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ とすればよい。 α は、von-Neumann 型人工粘性の項でのべたものと同様なもので、数値粘性の効果を差し引いて、 $\alpha = 0.75$ くらいが CIP には適当なようである (Ogata & Yabe 1991)。

3.7 まとめ

3.7.1 計算の流れ

CIP-MOCCT 法での磁気流体方程式を解く手順を以下にまとめておく。(図 3.4)

1. 密度、速度、圧力を移流させる $\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n \Rightarrow \rho^{n+a}, \mathbf{v}^{n+a}, p^{n+a}$
2. 人工粘性項を計算する $\rho^{n+a}, \mathbf{v}^{n+a}, p^{n+a} \Rightarrow q$
3. 密度、圧力の非移流項を計算 $\rho^{n+a}, p^{n+a}, q \Rightarrow \rho^{n+1}, p^{n+1}$
4. 非移流項の磁気張力項を計算 $\rho^{n+a}, \mathbf{B}^n \Rightarrow \mathbf{B}^s$
5. 速度の非移流項を計算 $\rho^{n+a}, \mathbf{v}^{n+a}, p^{n+a}, \mathbf{B}^n, \mathbf{B}^s, q \Rightarrow \mathbf{v}^{n+1}$
6. 電場を計算 $\rho^{n+a}, \mathbf{v}^{n+a}, \mathbf{B}^{n+a} \Rightarrow \mathbf{v}^*, \mathbf{B}^*$
7. 磁場の時間発展 $\mathbf{v}^*, \mathbf{B}^* \Rightarrow \mathbf{B}^{n+1}$

以上くりかえし。

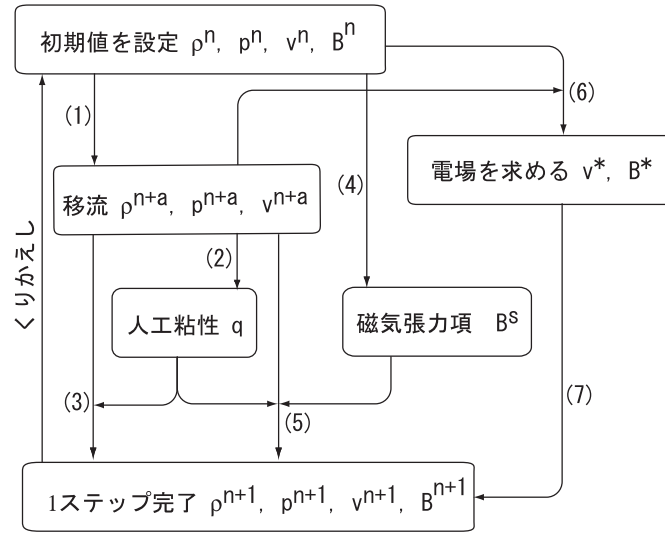


図 3.4: CIP-MOCCT 法のフローチャート。

3.7.2 テスト計算

流体衝撃波管問題 Sod (1978) の衝撃波管問題を解いた。グリッド数は 200、 $\Delta x = 0.005$ 、比熱比 $\gamma = 1.4$ でおこなった。初期に $x = 0.5$ に不連続がある。その他の初期条件は、表 3.1 にまとめている。図 3.5 は時刻 $t = 0.2$ での密度、圧力、速度のプロファイルである。破線は厳密解。

アルフベン波の伝播 グリッド数は 200、 $\Delta x = 0.005$ 。 $\rho = 1, p = 1, v_x = 0, v_y = 0, B_x/\sqrt{4\pi} = 1, B_y = 0$ の一様な場に、 $0.4 < x < 0.6$ の領域に $v_y = 0.001$ の摂動を与える。図 3.6 は時刻 $t = 0.2$ のときの $v_y, B_y/\sqrt{4\pi}$ のプロファイルである。点線は厳密解。

磁気流体衝撃波管問題 Brio & Wu (1984) の磁気流体衝撃波管問題を解いた。グリッド数は 400、 $\Delta x = 0.0025$ 、比熱比は $\gamma = 2$ である。その他の初期値は、表 3.2 にまとめている。図 3.7 は $t = 0.1$ でのプロファイル、表 3.3 はこのときの各場所での物理量の値である。

点源爆発 人工粘性の影響をみるため、2次元の点源爆発問題のシミュレーションを行なった。初期条件は、中心からの距離 $R < 0.08$ では、 $\rho = 1.0, p = 3.0$ 、 $R > 0.08$ では $\rho = 0.1, p = 0.1$ とし、磁場は考えていない。図 3.8、図 3.9 をみると、斜め方向の衝撃波面の位置が改善されていることがわかる。

MOC 法における補間法の比較 Brio & Wu (1984) の磁気流体衝撃波管問題を、MOC 法における補間法を変えて実行した。電場と磁気張力項の 2 カ所に補間する部分があるので、van Leer 法と CIP 法の 2 種類とあわせて 4 通りである。補間法とモデルは表 3.4 にまとめている。図 3.10 は密度のプロファイルを示している。

質量保存 上記2つの衝撃波管問題における、質量保存。全質量を時間の関数として次のように定義する。

$$M(t) = \int_0^1 \rho(t, x) dx \quad (3.95)$$

図3.11は、各時間での全質量を時刻 $t = 0$ での全質量でわったものをあらわしている。

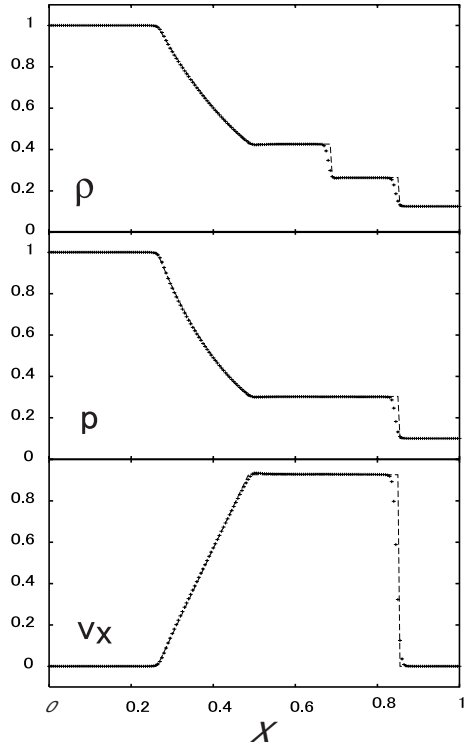


図 3.5: Sod (1978) の衝撃波管問題。

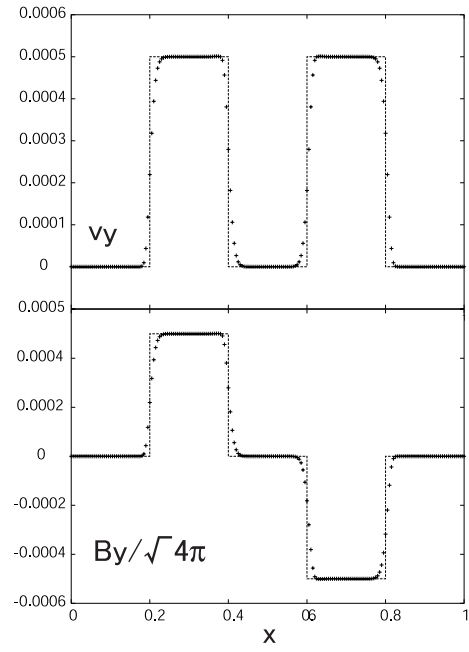


図 3.6: アルフベン波の伝搬。

	ρ	p	v_x
左	1	1	0
右	0.125	0.1	0

表 3.1: Sod (1978) の衝撃波管問題の初期値。

	ρ	p	v_x	v_y	$Bx/\sqrt{4\pi}$	$By/\sqrt{4\pi}$
左	1	1	0	0	0.75	1
右	0.125	0.1	0	0	0.75	-1

表 3.2: Brio & Wu (1984) の磁気流体衝撃波管問題の初期値。

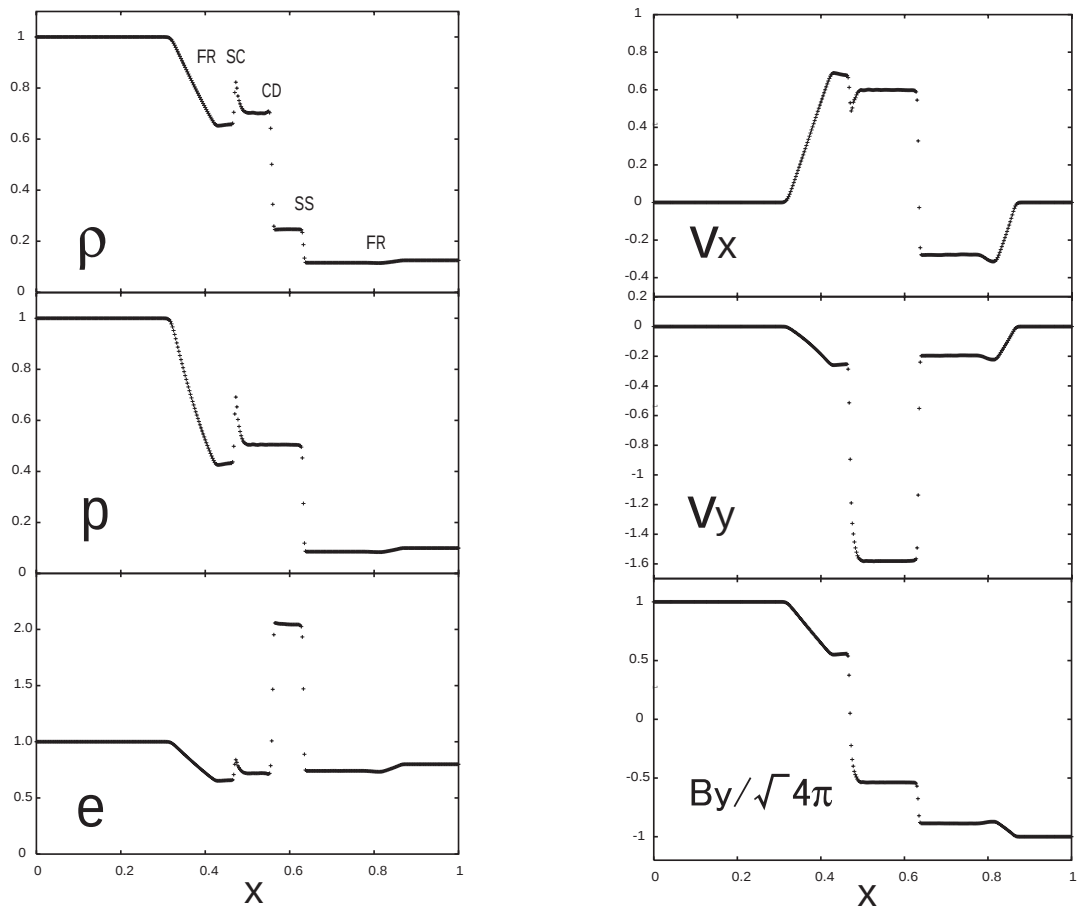


図 3.7: Brio & Wu (1984) の磁気流体衝撃波管問題。

Variable	Left	FR	SC	CD _l	CD _r	FR	Right
ρ	1.0	0.662	0.823	0.703	0.246	0.116	0.125
p	1.0	0.438	0.691	0.505	0.505	0.087	0.1
e	1.0	0.661	0.804	0.719	2.06	0.741	0.8
v_x	0	0.665	0.487	0.600	0.599	0.-279	0
v_y	0	-0.287	-0.119	-0.158	-0.158	-0.1972	0
$B_y/\sqrt{4\pi}$	1.0	0.539	-0.2231	-0.538	-0.537	-0.886	-1.0

表 3.3: Brio & Wu (1984) の磁気流体衝撃波での、各物理量の値。

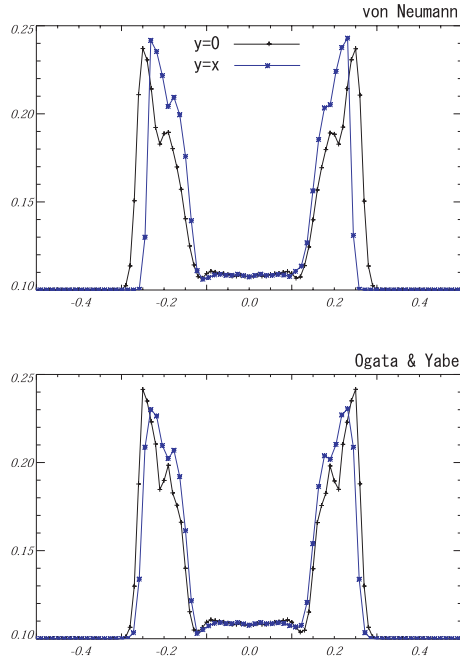


図 3.8: 点源爆発での人工粘性の比較。密度のプロファイル。 $y = 0$ 上の密度 (黒) と $y = x$ 上の密度 (青)。上が von Neumann 型粘性、下が Ogata & Yabe の粘性。

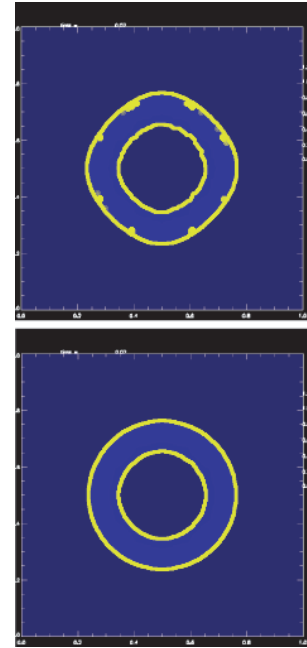


図 3.9: 点源爆発での人工粘性の比較。圧力の等値線。上が von Neumann 型粘性、下が Ogata & Yabe の粘性。

モデル	電場	磁気張力項
Kudoh (1997)	van Leer	van Leer
ct	CIP	van Leer
st	van Leer	CIP
all	CIP	CIP

表 3.4: MOC 法における、補間法の組み合わせ。図 3.10 参照

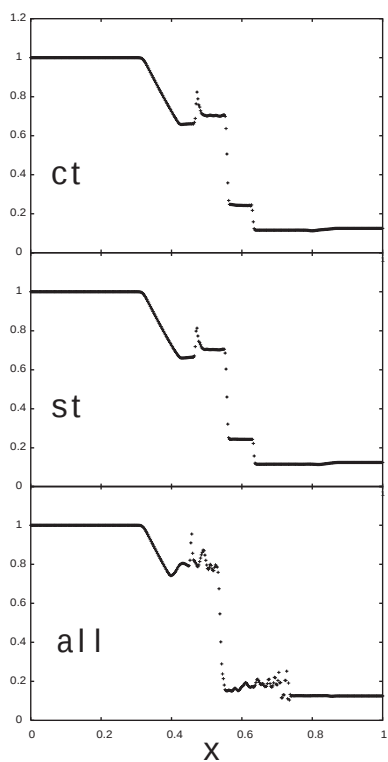


図 3.10: MOC 法での補間法の比較。補間法を変えて磁気流体衝撃波管問題を解いた。すべて密度プロファイルを示している。モデルについては表 3.4 参照。

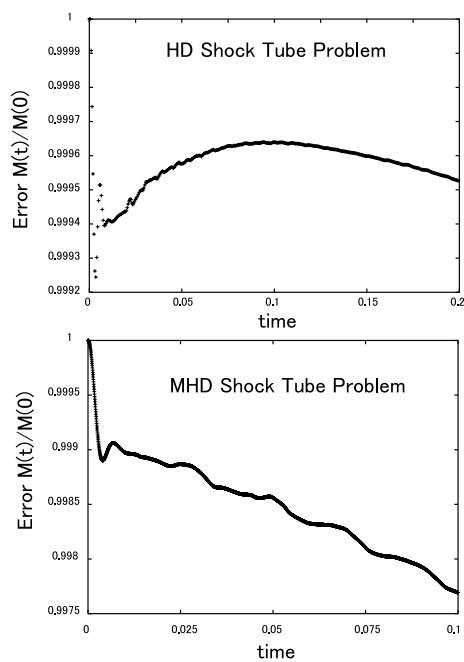


図 3.11: 数値エラーの時間変化。Sod (1978) の衝撃波管問題 (上) と Brio & Wu (1984) の磁気流体衝撃波管問題 (下)。 $M(0)$ は初期の全質量、 $M(t)$ は各時間での全質量。

参考文献

- [1] Brio, M. & Wu, C. C. 1984, *Journal of Computational Physics*, 140, 17
- [2] Evans, C. R. & Hawley, J. F. 1988, *ApJ*, 332, 659
- [3] Hawley, J. F. & Stone, J. M. 1995, *Computer Physics Communications*, 89, 127
- [4] Kudoh, T. & Shibata, K. 1997, *ApJ*, 476, 632
- [5] Ogata, Y. & Yabe, T. 1999, *Computer Physics Communications*, 119, 179
- [6] Sod, G. A. 1978, *Journal of Computational Physics*, 27, 1
- [7] Stone, J. M. & Norman, M. L. 1992, *ApJS*, 80, 791
- [8] Yabe, T. & Aoki, A. 1991, *Computer Physics Communications*, 66, 219
- [9] 矢部 孝, 内海 隆行, 尾形 陽一, 2003, CIP 法, 森北出版