

第 4 章

保存保証型 CIP コードの開発に向けて

京都大学 木暮 宏光

4.1 イントロダクション

CIP 法による解法は、方程式系を移流方程式の形をした部分とそれ以外の部分とに分けて、移流方程式の部分は物理量の空間微分の値も用いて、3 次関数で格子点間のプロファイルを近似する。つまり保存形の式であっても非保存形に書き換えて解くために、保存性が問題となってくる。そのために物理量の保存を保証した CIP 法が提案されている (矢部、内海、尾形 2003 の教科書に解説が掲載されている)。その方法は CIP-CSL2 法と CIP-CSL4 法と呼ばれているが、今回は CIP-CSL2 法について述べる。

4.2 CIP-CSL2 法

保存性を保証するための考え方は、保存形の式を解く解法と同様で、セル境界からの流入出を評価する事である。まず以下のような式を考える。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

この式を x で微分すると

$$\frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (D' u) = 0 \quad (4.2)$$

という保存形の式となる。つまり保存形の式で書ける物理量の積分量は、移流方程式で書けるということである。まず質量 D を

$$D_i(x) = \int_{x_i}^x f(x') dx' \quad (4.3)$$

と定義し、この量を 3 次関数

$$D_i(x) = AX^3 + BX^2 + f_i^n X \quad (4.4)$$

で評価する。ここで $X = x - x_i$ である。 $X = 0 (x = x_i)$ の時は定義から $D = 0$ であるので、3 次関数の X の 0 次の係数は 0 である。 Δx をグリッド間隔とした時、 $X = \Delta x$ であれば、 D はグリッド間のセル中の質量を意味することになる。密度 ρ は D の微分で与えられる。

$$\rho_i(x) = \frac{\partial D(x)}{\partial x} = 3AX^2 + 2BX + f_i^n \quad (4.5)$$

と書ける。補間関数の係数 A,B を関数の連続性から求める。考え方は通常の CIP 法と同様である。

$$D_i(x_{iup}) = -\text{sgn}(u_i)M_{icell}^n \quad (4.6)$$

$$\partial_x D_i(x_i) = f_i^n \quad (4.7)$$

$$\partial_x D_i(x_{iup}) = f_{iup}^n \quad (4.8)$$

$$\text{sgn}(u_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \geq 0 \\ -1 & \text{if } u_i < 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

ここで M_{icell}^n は上流側のセル内の全質量である。 iup は上流側のグリッドの番号を意味している。これらの関係式から各係数は

$$A = \frac{f_i^n + f_{iup}^n}{\Delta x_i^2} + \frac{2\text{sgn}(u_i)M_{icell}^n}{\Delta x_i^3} \quad (4.10)$$

$$B = -\frac{3\text{sgn}(u_i)M_{icell}^n}{\Delta x_i^2} - \frac{2f_i^n + f_{iup}^n}{\Delta x_i} \quad (4.11)$$

ここで $\Delta x_i = x_{iup} - x_i$ であり、 u_i が正の時は Δx_i が負になる事に注意。

4.3 時間発展

上記の補間関数によって、シミュレーション上では取り扱われていないグリッド間での物理量分布が定義された。これによって通常の CIP 法と同様に、移流方程式の部分の関しては解を求めることができる。密度に関しては通常の CIP 法と同様に保存形の式、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad (4.12)$$

を非保存形の式、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.13)$$

という形に変形して解く。質量に関しては、セル境界からの流入出量を考える。時間 Δt の間にセル境界 x_i から流入（出）した質量は

$$\Delta M_i^n = \int_{x_i+\xi}^{x_i} \rho(x') dx' = -D_i(x_i + \xi) \quad (4.14)$$

と書ける。ここで $\xi = -u_i \Delta t$ である。

4.4 計算例

以下には流体力学方程式を解いた結果を示す。まだ確認が不十分でバグ等が残っている可能性がある参考程度と考えて欲しい。

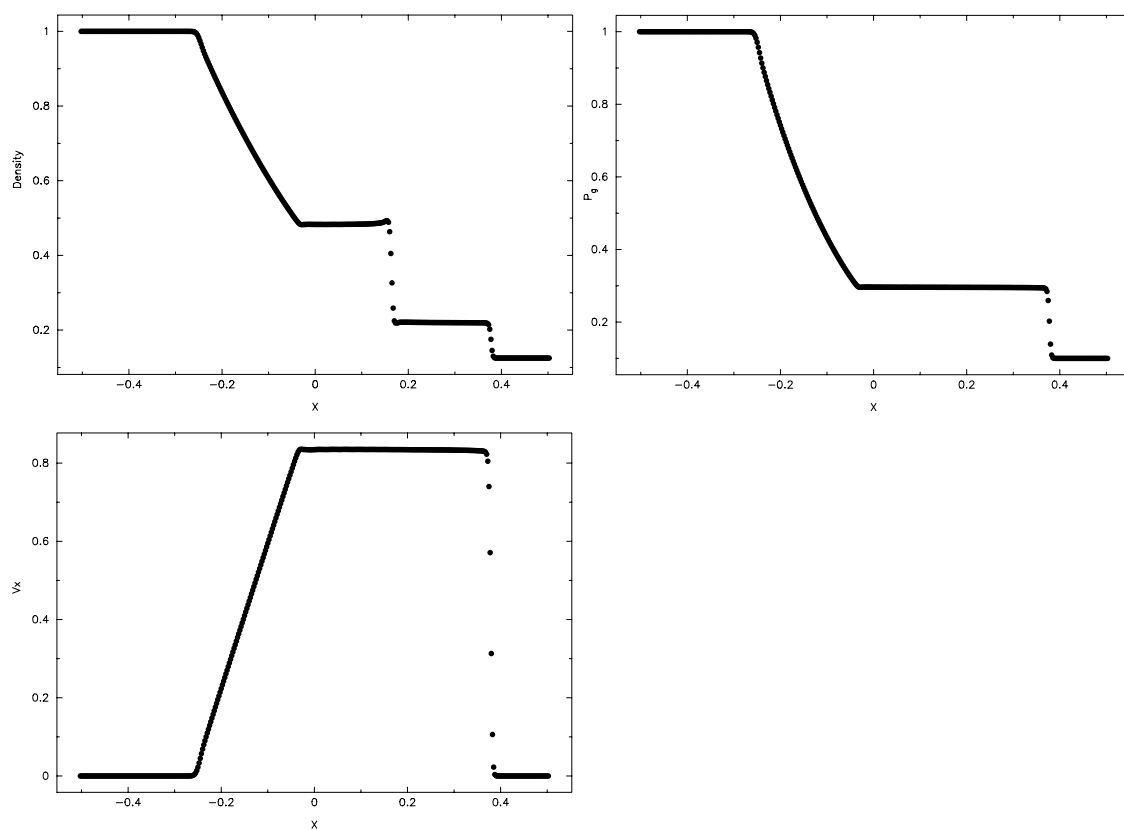


図 4.1: 通常の CIP 法で解いた結果。先に移流方程式部分（以後、移流相と呼ぶ）を、後にそれ以外の部分（以後、非移流相と呼ぶ）を解くコードでの計算結果。左上が密度、右上が圧力、下は速度。

4.4.1 1次元衝撃波管問題

グリッド数は 400、グリッド間隔 $\Delta x = 0.0025$ 、クーラン数は 0.4、人工粘性係数は 0.6、比熱比 $\gamma = 1.66666$ とした。t=0.2、計算ステップ数は約 480 の結果である。

保存性を見るために密度 ρ の計算領域中での総和、

$$\rho_{\Sigma} = \sum_i \rho_i dx_i \quad (4.15)$$

を計算した。そして初期値からのズレの初期値に対する割合の時間変化を t=0.26（波が計算領域の境界に達する時間）まで見た（図 4.2）。

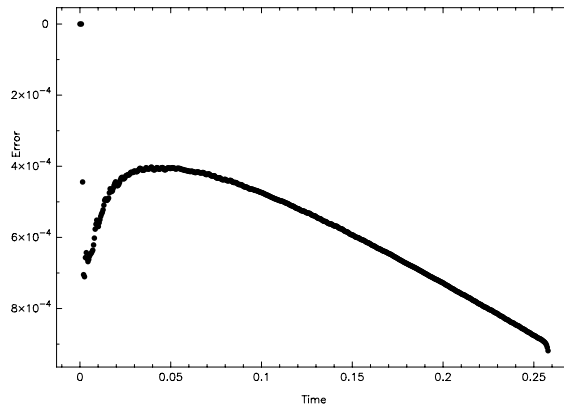


図 4.2: ρ_{Σ} の初期値に対するエラーの時間変化。

次に通常の CIP 法でも先に非移流相、後に移流相を解いた結果を示す。

同様に ρ_{Σ} のエラー時間変化を見ると以下ようになった。

先に移流相を解くコードでは最終的にエラーが -9.2×10^{-4} であったのに対して、先に非移流相を解くコードではエラーが -4.7×10^{-3} であった。

次に保存保証型（CIP-CSL2）のコードで解いた結果を示す。先に移流相を解くコードの結果を図 4.5 に示した。注目すべきは、接触不連続面前後で密度の overshoot、undershoot が見られる点である。しかし質量の保存性を見ると 2.7×10^{-6} となっていて、絶対値で比較すると通常の CIP 法に比べて 1 桁以上良くなっている（図 4.6 参照）。さらにそれは時間に対してほぼ一定の値となっている。

CIP-CSL2 法で先に非移流相を解くコードでの結果を図 4.7 に示した。先ほどと同様に接触不連続面前後で overshoot、undershoot が見られている。保存性の結果を図 4.8 に示した。エラーは 3.4×10^{-4} でほぼ一定となっている。やはり通常の CIP 法に比べて絶対値で 1 桁以上良くなっている。このように流体力学方程式を解く場合、保存性を考えれば移流相から解く、また CIP-CSL2 を用いる、というのが良いということができる。ただし今回は 1 つのテスト計算しか行っていないので、厳密な議論のためにはさまざまな初期条件からのテスト計算を行う必要がある。

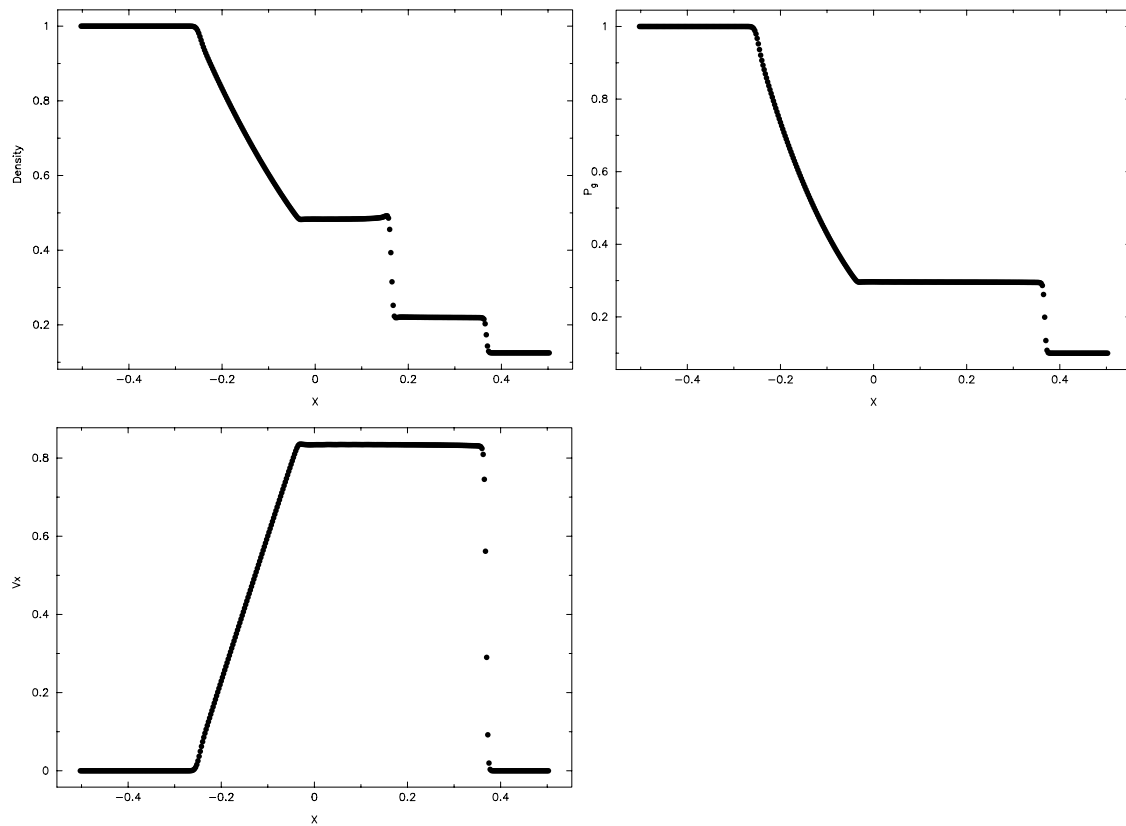


図 4.3: 通常の CIP 法で解いた結果。先に非移流相を、後に移流相を解くコードでの計算結果。左上が密度、右上が圧力、下は速度。

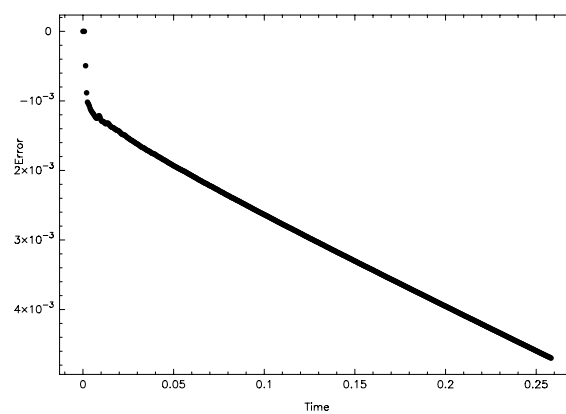


図 4.4: ρ_Σ のエラー時間変化。

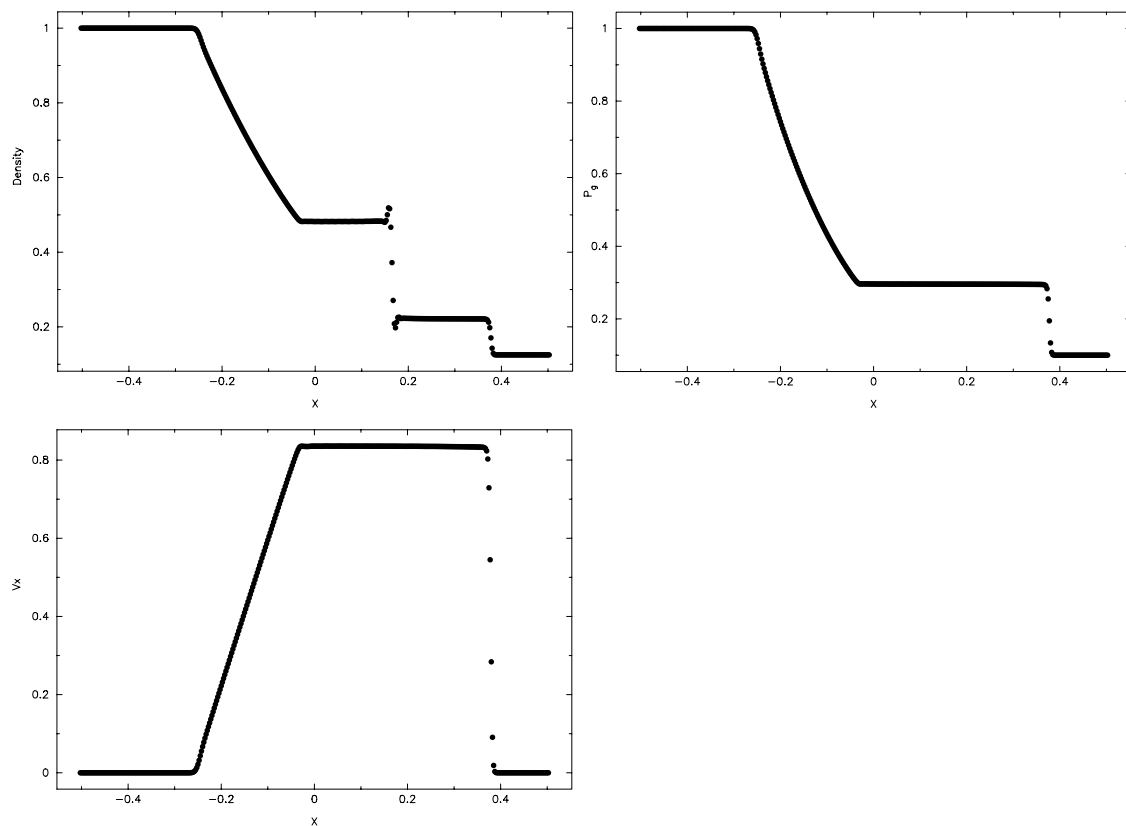


図 4.5: CIP-CSL2 法で解いた結果。先に移流相を、後に非移流相を解くコードでの計算結果。左上が密度、右上が圧力、下は速度。

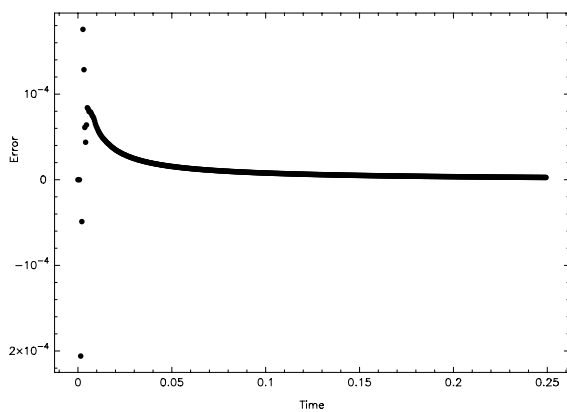


図 4.6: ρ_Σ のエラー時間変化。

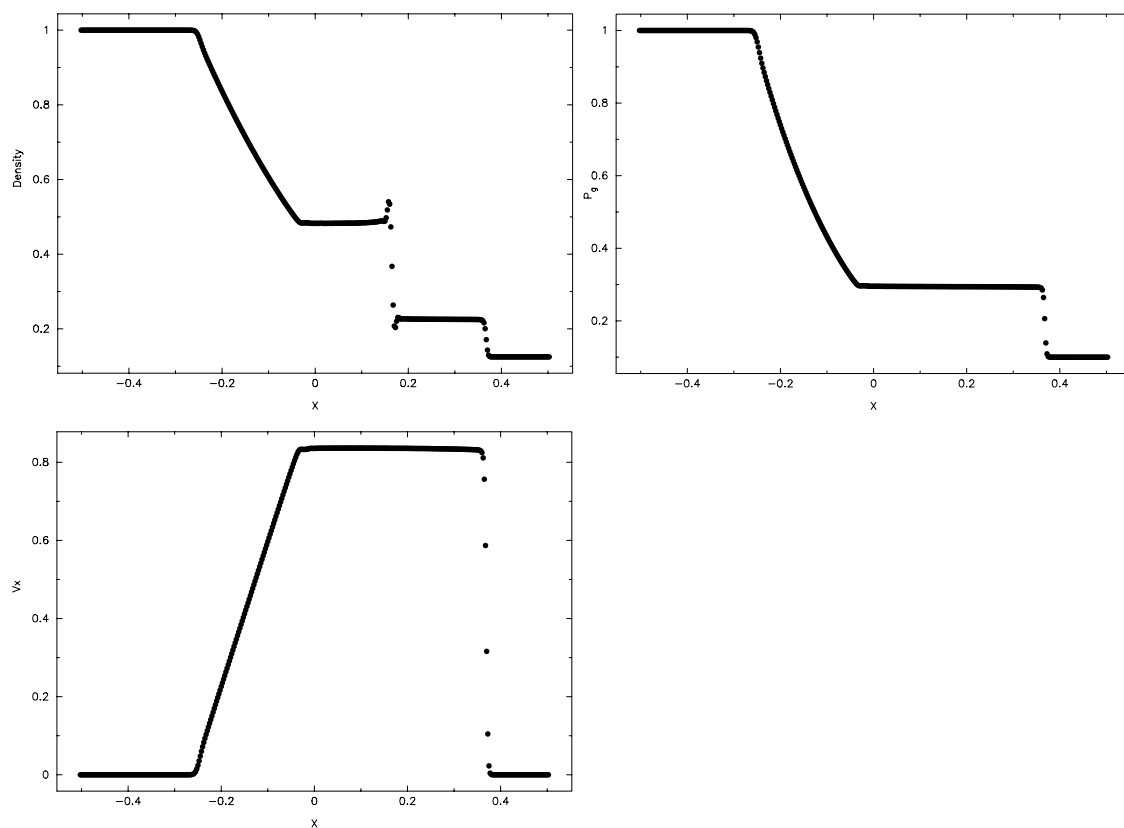


図 4.7: CIP-CSL2 法で解いた結果。先に非移流相を、後に移流相を解くコードでの計算結果。左上が密度、右上が圧力、下は速度。

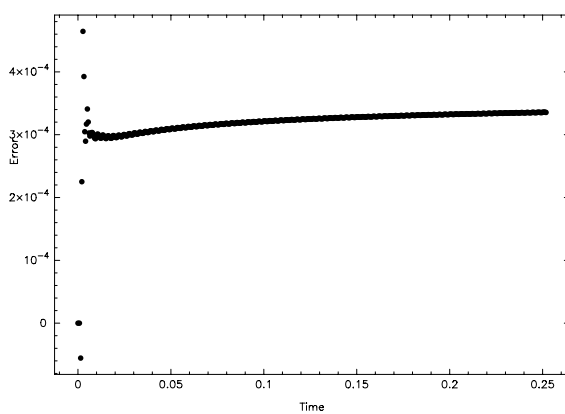


図 4.8: ρ_Σ のエラー時間変化。

4.4.2 ケルビンヘルムホルツ不安定性

次に CIP-CSL2 法を用いて 2 次元計算を行うための手法を述べる。いくつかの手段が提案されているが、最も簡単な directional splitting method による方法に関して述べる。それは、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

という保存形の方程式を

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial y} = 0 \quad (4.18)$$

という 2 つの式に分解して解くという方法である。積分量としては ρ を x 方向に積分した量 σ_x 、 y 方向に積分した量 σ_y 、 σ_x (σ_y) を y (x) 方向に積分した量 M が定義される。まず ρ と σ_x の値を x 方向に関して更新し、次に σ_y と M を x 方向に関して更新する (σ_y を x 方向に積分した量が M であるから)。この更新された値は時間方向に 1/2 ステップ進んだ量とすることができる。これら中間値を用いて、 ρ と σ_y を y 方向に、 σ_x と M を y 方向に関して更新することにより、時間 1 ステップ進んだ事になる。この時、先に x 方向に関して更新するか、 y 方向に更新するかの任意性がある。そのため、1 つ前の時間 1 ステップ進める過程で x 方向に関して先に更新したのであれば、このステップでは y 方向に関して先に更新する、とするのがよい。

通常の CIP 法 (directional splitting なし、先に非移流相を解く) と CIP-CSL2 法 (directional splitting、先に移流相を解く) によるケルビンヘルムホルツ不安定性の計算結果を示す。現在 CIP-CSL2 法では密度が小さくなり計算が進まなくなるという結果になっている。これはコードのバグなのか、1 次元計算の結果にあったような undershoot による結果なのか、今後調べる予定である。

参考文献

- [1] 矢部 孝, 内海 隆行, 尾形 陽一, 2003, CIP 法, 森北出版

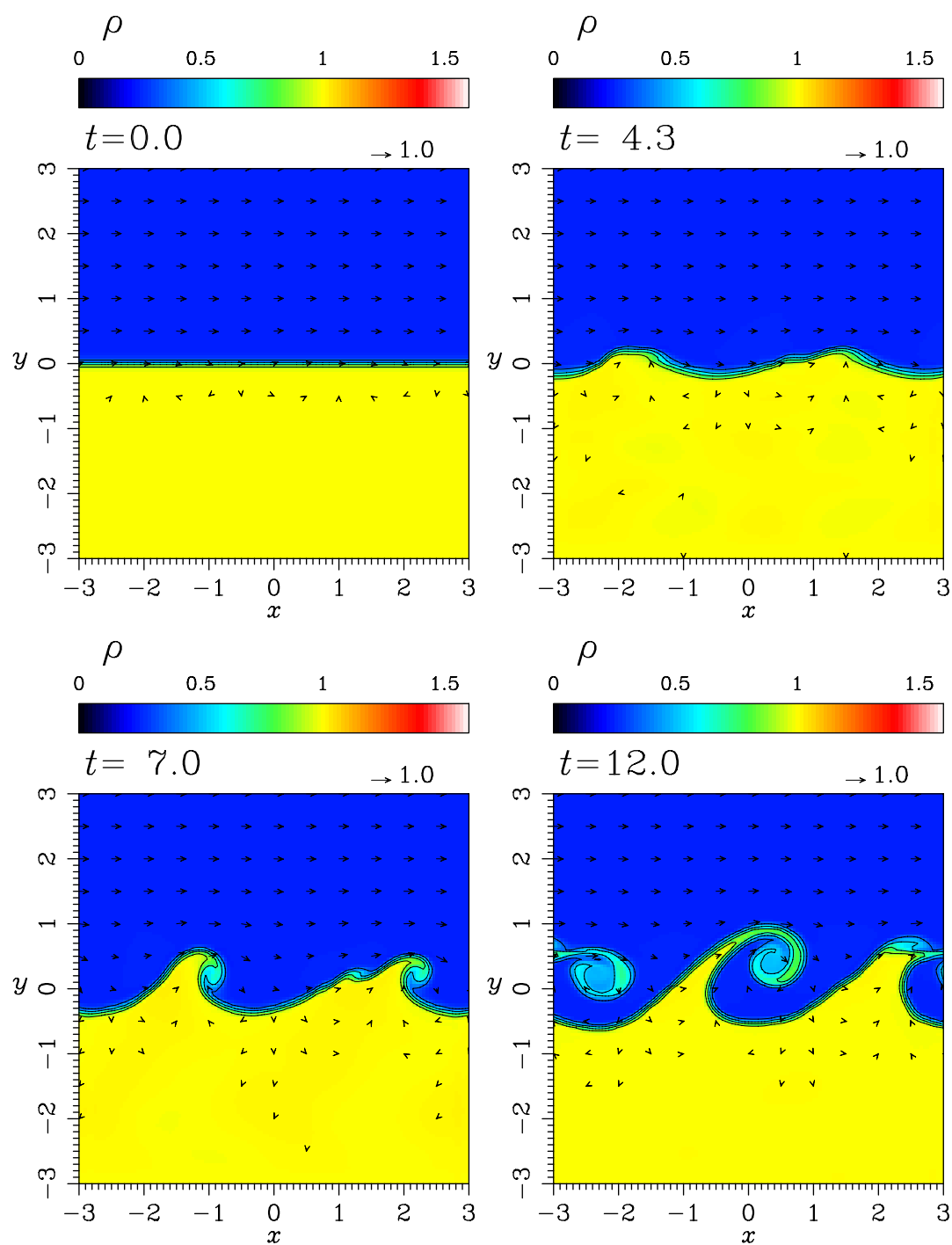


図 4.9: 通常の CIP 法を用いたケルビンヘルムホルツ不安定性の計算結果。グリッド数は 103×103 。クーラン数は 0.4、人工粘性係数は 0.6、比熱比 γ は 1.66666。

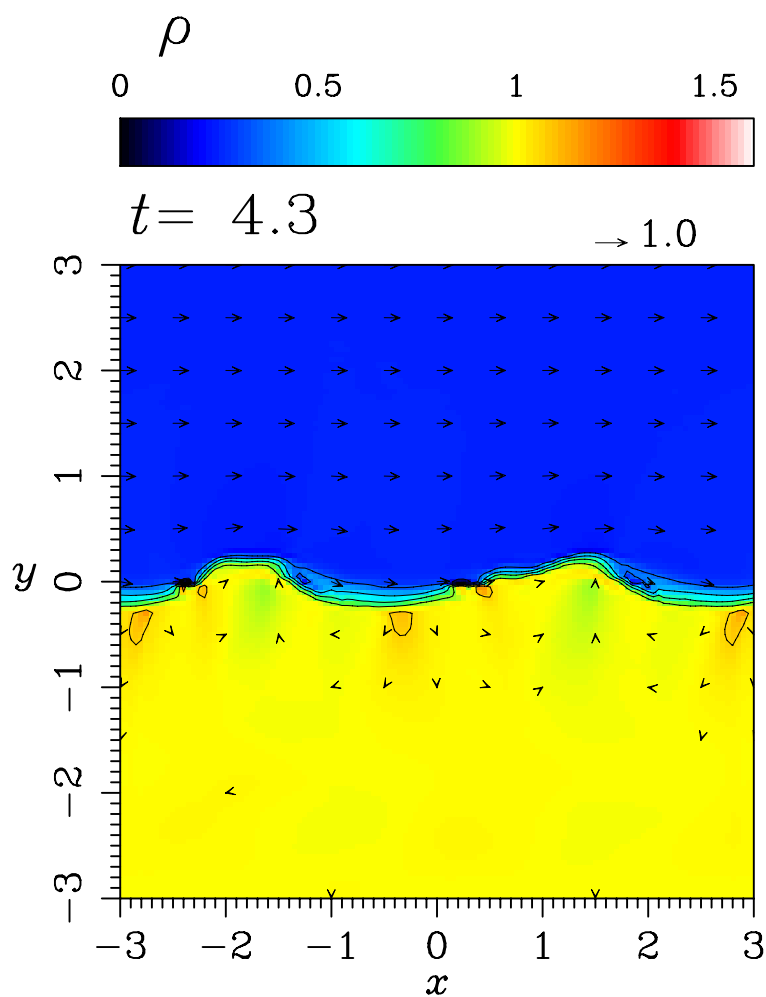


図 4.10: CIP-CSL2法を用いたケルビンヘルムホルツ不安定性の計算結果。パラメータは通常のCIP法での計算と同じ。波の前面部分で密度が小さい領域が出来て、時間刻み幅 Δt が小さくなったため、計算を打ち切った。