

第 5 章

一般相対論的磁気流体力学の数値解法

京都大学 水野 陽介

5.1 相対論的磁気流体力学シミュレーションの必要性と現状

活動銀河核 (AGN)、X 線連星、ガンマ線バースト (GRB) などの天体で見られる様々な高エネルギー天体物理現象は全て強い重力源と電磁場を介したプラズマとの相互作用によって引き起こされていると考えられる。例えば活動銀河核 (AGN) から噴出する宇宙ジェットではパーセクスケールでの観測で超光速運動を見せるものがある。これを説明するためにはジェットが光速の 99.5% を超える (ローレンツ係数 $\gamma > 10$) 速度を持つ必要がある。また系内で見つかっているマイクロクエーサーと呼ばれる GRS1915+105 (Mirabel & Rodriguez 1994) や GRO J1655-40 (Tingay et al. 1995) でも $0.9c$ (c は光速を表す) の速度を持つジェットが見つかっている。このような天体現象を解明するためには相対論的な取り扱いが必要不可欠である。また同様にブラックホールのような強い重力源近くでの物理を厳密的に取り扱うには (一般) 相対論的な取り扱いが必要である。

相対論的流体力学 (RHD) シミュレーション、特に相対論的磁気流体力学 (RMHD) シミュレーションは近年多くの研究者によって精力的に開発が進められ、今最も注目されている研究分野である。RHD シミュレーションについては Marti & Müller (2003) と Font (2004) によるレビューがあるので参考にして頂きたい。一般相対論的磁気流体力学 (GRMHD) では、Willson (1977) が最初にカーブラックホール周りでの GRMHD 方程式を数値的に解いた。その後、Yokosawa (1993) まで GRMHD シミュレーションは行われなかった。一方で、特殊相対論的磁気流体力学 (SRMHD) に関しては van Putten (1993)、Koide, Nishikawa, & Mutel (1996)、Komissarov (1999)、Balsara (2001)、Koldoba, Kuznetsov, & Ustyugova (2002)、Del Zanna, Bucciantini, & Londrillo (2003) によってコードの開発が進められている。特に Komissarov (1999) や Del Zanna, Bucciantini, & Londrillo (2003) では近似リーマン解法を用いたゴドノフタイプの数値解法を適用している。GRMHD に関しては Koide, Shibata, & Kudoh (1998, 1999) によって初めてコード開発及び天体現象への応用が行われた。その後、このコードを用いて、カーブラックホール周りの降着円盤からのジェットの形成 (Koide et al. 2000)、カーブラックホールからのエネルギー引き抜き (Koide et al. 2002; Koide 2003)、ガンマ線バーストに関連した大質量星の重力崩壊 (Mizuno et al. 2004a, 2004b) に関してシミュレーションを行っている。

一方で、ここ数年では、De Villiers & Hawley (2003a) と Gammie, McKinney & Tóth (2003) によってお互い異なる数値解法を用いて GRMHD コードが形成され、同じテスト計算による比較に

よって同様の結果が得られることが示された。彼らはこの GRMHD コードを用いてブラックホール周りの降着円盤の進化やジェット形成 (De Villiers & Hawley 2003b; De Villiers, Hawley, & Krolik 2003; Hirose et al. 2004; De Villiers et al. 2004)、カーブラックホールの回転の進化 (Gammie, Shapiro, & McKinney 2004)、ブラックホールからのエネルギー引き抜き (McKinney & Gammie 2004) に関して精力的に研究を行っている。

ここでは、我々が使用している Koide et al. (2000) によって開発された GRMHD コードの基礎方程式及び数値解法について紹介する¹。第 2 節では、GRMHD の基礎方程式の 4 次元形式、そしてシミュレーションに適した 3+1 形式を紹介する。第 3 節ではその GRMHD 基礎方程式の数値解法を最終節では現状の問題点と今後の発展に向けたコメントを紹介する。それぞれについて、詳しいことは参考文献を見て頂きたい。

5.2 基礎方程式

5.2.1 GRMHD 方程式の 4 次元形式

一般相対論的磁気流体力学の基礎方程式は曲がった時空における粒子数保存、エネルギー運動量保存、マックスウェル方程式、そして電気抵抗なし (理想 MHD 条件) のオームの法則の一般相対論形式からなる。ここでは放射冷却、電気伝導度、粘性、自己重力を無視する。時空 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x^1, x^2, x^3)$ は、計量 $g_{\mu\nu}$ によって現される。ここで、 μ や ν のようなギリシャ文字の添え字は 0 から 3 までを取る。 c は光速である。4 次元時空における GRMHD の基礎方程式は

$$\nabla_\nu(\rho U^\nu) = \frac{1}{\sqrt{-||g||}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-||g||} \rho U^\nu) = 0, \quad (5.1)$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-||g||}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-||g||} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu T^{\sigma\nu} = 0, \quad (5.2)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (5.3)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu, \quad (5.4)$$

ここで、 ∇_ν は共変微分、 $||g||$ は計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式、 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ はクリストフェル記号、

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right), \quad (5.5)$$

である。 U^ν と $J^\nu = (c\rho_e, J^1, J^2, J^3)$ はそれぞれ 4 次元速度、4 次元電流である (ρ_e は電荷密度)。一般相対論的エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は以下のように与えられる。

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (e_{int} + p)U^\mu U^\nu + F_\sigma^\mu F^{\nu\sigma} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu} F^{\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa}, \quad (5.6)$$

ここで、 $F^{\mu\nu}$ は電磁場テンソル、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (5.7)$$

そして $A^\mu = (\phi_e/c, A^1, A^2, A^3)$ は 4 次元ベクトルポテンシャルである (ϕ_e は静電ポテンシャル)。電場 E_i と磁場 B_i はそれぞれ

$$E_i = cF_{i0} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.8)$$

¹本章の内容の多くは Koide et al. (2000)、Koide (2003) を参考に書かれている。

$$B_1 = F_{23}, \quad B_2 = F_{31}, \quad B_3 = F_{12}, \quad (5.9)$$

で与えられる。スカラー量 ρ 、 p 、 e_{int} はそれぞれ密度、圧力、内部エネルギー密度である。プラズマガスは理想気体として表わされたとする。すなわち、

$$e_{int} = \rho c^2 + \frac{p}{\Gamma - 1}, \quad (5.10)$$

である。ここで Γ は比熱比である。これらの方程式に加えて、理想 MHD 条件を仮定する

$$F_{\mu\nu} U^\nu = 0. \quad (5.11)$$

この条件を使うことで方程式 (5.1)-(5.3) を閉じることができる。方程式 (5.4) は電流密度 J^μ を計算するときのみ使用する。

ここでは、計量は時間発展しないと仮定する。もし計量の非対角成分 $g_{\mu\nu}$ がゼロならば、

$$g_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (5.12)$$

である。ここでローマ字の添え字 (i, j) は 1 から 3 を取る。

$$g_{00} = -h_0^2, \quad g_{ii} = h_i^2, \quad (5.13)$$

$$g_{i0} = g_{0i} = -\frac{h_i^2 \omega_i}{c}, \quad (5.14)$$

これらを使って計量は以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -h_0^2 (cdt)^2 + \sum_{i=1}^3 [h_i^2 (dx^i)^2 - 2h_i^2 \omega_i dt dx^i]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

5.2.2 GRMHD 方程式の 3+1 形式

一般に 4 次元形式で書かれた GRMHD 方程式は時間と空間がカップルしているため数値的に磁気流体の時間発展を解くのは困難である。そこでその困難を解決する方法である、空間と時間を分解した形式 (3+1 形式) を示す。GRMHD 方程式をこの 3+1 形式で書き下すことによって GRMHD 方程式の時間発展を数値的に解くことが可能となる。

まず観測される物理量を表わすために以下に示す幾つか異なる座標系を使う。

(1) 実験室系 (Laboratory frame)

これはブラックホールから遠く離れた観測者が見た座標系で、“star-fixed coordinate”あるいは“observer-at-infinity frame”と呼ばれる。カー時空ではこの系の座標は Boyer-Lindquist 座標で与えられる。ここから実験室系で反変ベクトルを a^μ として表わす。

(2) Fiducial observer (FIDO) frame

これは同じ時刻を取る 3 次元超表面 (hypersurface) の上に張られた座標 (空間 3 次元) に静止している観測者から見た座標系であり、局所慣性系である。この座標系 $(ct, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$ で、計量は

$$(ds)^2 = -(cd\hat{t})^2 + \sum_i (d\hat{x}^i)^2, \quad (5.16)$$

となる。ここで、

$$cd\hat{t} = \alpha cdt, \quad (5.17)$$

$$d\hat{x}^i = h_i dx^i - \beta^i \alpha cdt, \quad (5.18)$$

である。それぞれ α 、 β^i を “lapse function”、“shift velocity” と言う。

$$\alpha = \sqrt{h_0^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{h_i \omega_i}{c} \right)^2} \quad (5.19)$$

$$\beta^i = \frac{h_i \omega_i}{c\alpha}. \quad (5.20)$$

lapse function α は遠方の観測者が計ってる時間と FIDO frame での時間との間の経過時間の比を表し、shift velocity β^i に微小時間 dt を掛けた $\beta^i dt$ はある時刻 t の 3 次元超表面から次の時間 $t + dt$ での 3 次元超表面に移動した際の位置のずれを表している。また、この計量で行列式 $\|g\|$ は $\sqrt{-\|g\|} = \alpha h_1 h_2 h_3$ で与えられる。反変ベクトルは以下のように書かれる。

$$g^{00} = -\frac{1}{\alpha^2} \quad (5.21)$$

$$g^{i0} = g^{0i} = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\omega_i}{c} \quad (5.22)$$

$$g^{ij} = \frac{1}{h_i h_j} (\delta^{ij} - \beta^i \beta^j) \quad (5.23)$$

ここで δ^{ij} はクロネッカー記号の δ である。FIDO での反変ベクトル $\hat{a}^\mu$ は

$$\hat{a}^0 = \alpha a^0, \quad \hat{a}^i = h_i a^i - \alpha a^0 \beta^i \quad (5.24)$$

である。一方、共変ベクトルは

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{\alpha} a_0 + \sum_i \beta^i \frac{1}{h_i} a_i, \quad \hat{a}_i = \frac{1}{h_i} a_i \quad (5.25)$$

である。これは計量がミンコフスキー時空と同じく $\hat{a}^0 = -\hat{a}_0$ そして $\hat{a}^i = \hat{a}_i$ が成り立つためである。

(3) 共動座標系 (Comoving frame)

この座標系では観測者がガスまたはプラズマに乗って全ての現象を局所的に見る。この座標系は圧力や密度などのスカラー量を測るのに使われる。

方程式 (5.24) と (5.25) を使って、FIDO frame で計られたベクトル、テンソルの成分は以下のように表される。

$$\hat{\gamma} = \alpha U^0, \quad (5.26)$$

$$\hat{D} = \hat{\gamma} \rho, \quad (5.27)$$

$$\hat{v}^i = \frac{h_i}{\hat{\gamma}} c U^i - c \beta^i, \quad (5.28)$$

$$\epsilon + Dc^2 = \hat{T}^{00} = \alpha^2 T^{00}, \quad (5.29)$$

$$\hat{P}^i = \frac{1}{c} \hat{T}^{i0} = \frac{\alpha h_i}{c} T^{i0} - \frac{\beta^i}{c} (\epsilon + Dc^2), \quad (5.30)$$

$$\hat{T}^{ij} = h_i h_j T^{ij} - \beta^i h_0 h_j T^{0j} - \beta^j h_i h_0 T^{i0} + \beta^i \beta^j \alpha^2 T^{00}, \quad (5.31)$$

$$\hat{F}_{i0} = -\hat{F}_{0i} = \frac{1}{\alpha h_i} F_{i0} + \sum_j \beta^j \frac{1}{h_i h_j} F_{ij}, \quad (5.32)$$

$$\hat{F}_{ij} = \frac{1}{h_i h_j} F_{ij}, \quad (5.33)$$

$$\hat{\rho}_e = \frac{1}{c} \alpha J^0, \quad (5.34)$$

$$\hat{J}^i = h_i J^i - \hat{\rho}_e c \beta^i, \quad (5.35)$$

ここで、 $\hat{\gamma}$ はローレンツ係数、 $\hat{v}^i$ は3次元速度、 ϵ はエネルギー密度、 $\hat{P}^i$ は運動量密度である。ここからはローレンツ係数 γ と電荷密度 ρ_e は $\gamma = \hat{\gamma}$ 、 $\rho_e = \hat{\rho}_e$ としてハットを取って記述する。

FIDO frame で測られた物理量の間の関係は特殊相対論的 MHD(SRMHD) の関係 (Koide, Nishikawa, & Mutel 1996; Koide 1997)² と同じである。ここにその関係をまとめておく。

$$D = \gamma \rho, \quad (5.36)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^3 (\hat{v}^i/c)^2}}, \quad (5.37)$$

$$\hat{P}^i = \frac{1}{c^2} h \gamma^2 \hat{v}^i + \frac{1}{c^2} (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}})_i, \quad (5.38)$$

$$\hat{T}^{ij} = p \delta^{ij} + \frac{h}{c^2} \gamma^2 \hat{v}^i \hat{v}^j + \left(\frac{\hat{B}^2}{2} + \frac{\hat{E}^2}{2c^2} \right) \delta^{ij} - \hat{B}_i \hat{B}_j - \frac{\hat{E}_i \hat{E}_j}{c^2}, \quad (5.39)$$

$$\epsilon = h \gamma^2 - p - Dc^2 + \frac{\hat{B}^2}{2} + \frac{\hat{E}^2}{2c^2}, \quad (5.40)$$

ここで h は相対論的エンタルピー密度、

$$h = \rho c^2 + \frac{\Gamma p}{\Gamma - 1} = e_{int} + p, \quad (5.41)$$

である。また、磁場 $\hat{\mathbf{B}}$ と電場 $\hat{\mathbf{E}}$ は以下のように定義される。

$$\hat{B}_i = \sum_{j,k} \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \hat{F}_{jk}, \quad (5.42)$$

$$\hat{E}_i = c \hat{F}_{i0} \quad (5.43)$$

FIDO によって測られた変数を使用して、プラズマに関する一般相対論的保存則とマックスウェル方程式 (5.1)-(5.4)、(5.11) からなる GRMHD の基礎方程式を導く。

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\alpha h_1 h_2 h_3}{h_i} D (\hat{v}^i + c \beta^i) \right], \quad (5.44)$$

²特殊相対論ではミンコフスキー時空を取るなので計量は $h_0 = -1, h_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}^i}{\partial t} = & - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{\alpha h_1 h_2 h_3}{h_j} (\hat{T}^{ij} + c \beta^j \hat{P}^i) \right] \\ & - (\epsilon + Dc^2) \frac{1}{h_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} + \alpha f_{curv}^i - \sum_j \hat{P}^j \sigma_{ji}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = & - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\alpha h_1 h_2 h_3}{h_i} c^2 \left(\hat{P}^i - D \hat{v}^i + \frac{\beta^i}{c} \epsilon \right) \right] \\ & - \sum_i c^2 \hat{P}^i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} - \sum_{i,j} \hat{T}^{ij} \sigma_{ji}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\hat{E}_i = - \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \hat{v}^j \hat{B}_k, \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \hat{B}_i}{\partial t} = \frac{-h_i}{h_1 h_2 h_3} \sum_{j,k} \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\alpha h_k \left(\hat{E}_k - \sum_{l,m} \epsilon^{klm} c \beta^l \hat{B}_m \right) \right], \quad (5.48)$$

$$\sum_i \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \hat{B}_i \right) = 0, \quad (5.49)$$

$$\rho_e = \sum_{j,k} \frac{1}{c^2} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \hat{E}_i \right), \quad (5.50)$$

$$\alpha(\hat{J}^i + \rho_e c \beta^i) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial t} = \sum_{j,k} \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\alpha h_k \left(\hat{B}_k + \sum_{l,m} \epsilon_{klm} \beta^l \frac{\hat{E}_k}{c} \right) \right], \quad (5.51)$$

ここで、

$$f_{curv}^i \equiv \sum_j (G_{ij} \hat{T}^{ij} - G_{ji} \hat{T}^{jj}), \quad (5.52)$$

$$G_{ij} \equiv - \frac{1}{h_i h_j} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x^j} \right), \quad (5.53)$$

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{h_i}{h_j} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right), \quad (5.54)$$

である。この形の方程式を 3+1 形式と呼ぶ。それは空間と時間に関する微分が完全に分けられた形だからである。3+1 形式に関する詳細は Thone, Price, & Macdonald (1986) の教科書を参考にしたい。実際のシミュレーションではこの 3+1 形式で書かれた GRMHD 方程式を差分法を用いて時間発展を解いていく³。数値解法については次章で述べる。

³時間発展を解いていく際、理想 MHD 条件を課しているので、電場 $\hat{E}$ の時間発展は差分法で直接解かない。式 (5.47) を式 (5.48) に代入して磁場 $\hat{B}$ の時間発展のみを解く。電場 $\hat{E}$ に関しては各時間での速度 $\hat{v}$ と磁場 $\hat{B}$ を使って式 (5.47) から求める。

5.2.3 GRMHD 方程式のベクトル形式

ここでは、前節で書き下した 3+1 形式での GRMHD 方程式を見通しよくするため、ベクトル形式での表記を行う。まず、ここで FIDO frame で測られた 3 次元ベクトル場 $\hat{\mathbf{a}}$ 、 $\hat{\mathbf{b}}$ そしてスカラー場 $\hat{\phi}$ の微分を導入する。

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{a}} = \sum_i \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \hat{a}^i \right), \quad (5.55)$$

$$(\hat{\nabla} \hat{\phi})_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^i}, \quad (5.56)$$

$$(\hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{a}})_i = \sum_{j,k} \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} (h_k \hat{a}^k), \quad (5.57)$$

$$[(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{a}}]_i = \sum_j \left[\frac{\hat{b}^j}{h_j} \frac{\partial \hat{a}^i}{\partial x^j} - G_{ij} \hat{a}^j \hat{b}^i + G_{ji} \hat{a}^j \hat{b}^i \right]. \quad (5.58)$$

これらの定義を使って、ほとんどのベクトル解析の公式を修正することなしに使用することができる。

$$(\hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{a}}) \times \hat{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{a}} - (\nabla \hat{\mathbf{a}}) \cdot \hat{\mathbf{b}} + [\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}], \quad (5.59)$$

ここで、

$$[(\hat{\nabla} \hat{\mathbf{a}}) \cdot \hat{\mathbf{b}}]_i \equiv \sum_j \frac{1}{h_i} \frac{\partial \hat{a}^j}{\partial x^i} \hat{b}^j \quad (5.60)$$

$$[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}]_i \equiv \sum_j G_{ij} (\hat{a}^j \hat{b}^i - \hat{a}^i \hat{b}^j) \quad (5.61)$$

である。さらに、

$$\hat{\nabla} \times (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) = (\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{b}}) \hat{\mathbf{a}}^i - (\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{a}}) \hat{b}^i + \sum_j \frac{h_i}{h_j} \left[\hat{b}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{a}^i}{h_i} \right) - \hat{a}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\hat{b}^i}{h_i} \right) \right]. \quad (5.62)$$

となる。

上記の 3 次元ベクトルとスカラー場の微分を使って GRMHD の基礎方程式 (5.44)-(5.51) は以下のような FIDO のベクトル形式で書き表すことができる。

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\hat{\nabla} \cdot [\alpha D (\hat{\mathbf{v}} + c\beta)], \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{P}}}{\partial t} = -\hat{\nabla} \cdot [\alpha (\hat{\mathbf{T}} + c\beta \hat{\mathbf{P}})] - (\epsilon + Dc^2) \hat{\nabla} \alpha + \alpha \mathbf{f}_{curv} - \hat{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\hat{\nabla} \cdot [\alpha (c^2 \hat{\mathbf{P}} - Dc^2 \hat{\mathbf{v}} + \epsilon c\beta)] - (\hat{\nabla} \alpha) \cdot c^2 \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{T}} : \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\hat{\nabla} \times [\alpha (\hat{\mathbf{E}} - c\beta \times \hat{\mathbf{B}})], \quad (5.66)$$

$$\alpha (\hat{\mathbf{J}} + \hat{\rho}_e c\beta) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial t} = \hat{\nabla} \times \left[\alpha \left(\hat{\mathbf{B}} + \frac{1}{c} \beta \times \hat{\mathbf{E}} \right) \right], \quad (5.67)$$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0, \quad (5.68)$$

$$\hat{\rho}_e = \frac{1}{c^2} \hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad (5.69)$$

$$\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{B}} = 0, \quad (5.70)$$

ここで、 β は $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ の成分を持つ 3 次元ベクトル β_i である。これらの方程式は幾何的な係数や lapse function α や shift velocity β^i を含む項を除いて非相対論 MHD 方程式の保存形と良く似ている⁴。また、 $-c^2 \hat{\nabla} \alpha$ は非相対論 MHD 方程式の重力に相当し、 $c^2 \alpha$ は重力ポテンシャルとみなすことができる。 $\alpha \mathbf{f}_{curv}$ の項は遠心力を含んでいる。 σ を含む項は空間自身の引きずりによるシアーから生じたものである。

5.2.4 ブラックホールの計量

ブラックホール周辺での天体現象を扱うためにはその曲がった時空構造を表す計量を使う必要がある⁵。ここでは回転しているブラックホール (カーブラックホール) の作る時空構造を考える。一般的にブラックホールは質量 M 、角運動量 J 、電荷 Q の 3 つの物理量を持つことができる。カーブラックホールはそのうちの 2 つ、質量 M と角運動量 J を持っている。ブラックホールの回転の度合いを表すパラメータとして回転パラメータ $a \equiv J/J_{max}$ を用いる。ここで $J_{max} = GM^2/c$ は質量 M を持つブラックホールが最大限に回転しているときに持つ角運動量である。Boyer-Lindquist 座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ でカー時空の計量は

$$h_0 = \sqrt{1 - \frac{2r_g r}{\Sigma}}, \quad h_1 = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}, \quad h_2 = \sqrt{\Sigma}, \quad h_3 = \sqrt{\frac{A}{\Sigma}} \sin \theta \quad (5.71)$$

と書かれる。ここで $r_g \equiv GM/c^2$ は重力半径、

$$\Delta = r^2 - 2r_g r + (ar_g)^2, \quad (5.72)$$

$$\Sigma = r^2 + (ar_g)^2 \cos \theta, \quad (5.73)$$

$$A = \{r^2 + (ar_g)^2\}^2 - \Delta (ar_g)^2 \sin^2 \theta, \quad (5.74)$$

である。この計量で lapse function は

$$\alpha = \sqrt{\Delta \Sigma / A}, \quad (5.75)$$

で与えられる。事象の地平面の半径は

$$r_H = r_g (1 + \sqrt{1 - a^2}), \quad (5.76)$$

である。これは $\alpha = 0$ を取るとき得られる。また、たまにブラックホールのシュバルツシルト半径 (Schwarzschild radius)、

$$r_S = 2GM/c^2 = 2r_g, \quad (5.77)$$

を用いることがある。

カーブラックホールでは、自身の回転のためにブラックホールの周りの時空を引きずる。これを時空の引きずり効果 (frame-dragging effect) と言う。この時空の引きずりによってブラックホールのすぐ外側にはエルゴ領域と呼ばれている特殊な領域ができる。この領域では、物質、エネルギー、情報

⁴ ここでの式は光速 c を含んだ形で書いてある。そのため $c \rightarrow \infty$ では非相対論 MHD の基礎方程式となる。

⁵ 平坦な時空 (ミンコフスキー時空) を扱うときは計量を $h_0 = -1, h_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) とすればよい。

のどれも全てブラックホールの回転と同じ方向に回転しなければならない。エルゴ領域の表面は $h_0 = 0$ 、即ち

$$r = r_g(1 + \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta}), \quad (5.78)$$

で与えられる。エルゴ領域内では、shift velocity $c\beta^\phi$ は光速より速くなる。

ブラックホールが回転していない ($a = 0$) とき、カー時空の計量はシュバルツシルト時空の計量に変わる。このとき ブラックホールの時空の引きずり効果はなくなり、エルゴ領域もなくなる。また、shift velocity $c\beta^\phi$ はゼロになる。

5.3 GRMHD 方程式の数値解法

前の節で導出した GRMHD の基礎方程式を数値的に時間発展させる。数値的解法は様々なものがあり、第 4-1 節で紹介したように相対論的流体 (磁気流体) 力学においても様々な解法が用いられている。ここでは我々のグループが使用している simplified TVD method を簡単に紹介する。また時間発展によって得られる各時刻ごとの保存量から密度、圧力、速度といったそれぞれの物理量を導出するための方法を紹介する。

5.3.1 Simplified TVD Method

TVD とは total variation diminishing の略であり、時間発展において全変動 (total variation) が増加しないという条件である。その条件を満足する解法を TVD スキームと言う。TVD に関しては数値シミュレーションサマースクールテキスト第 1 章または藤井孝蔵の「流体力学の数値計算法」を参考にして頂きたい。ここでは Davis (1984) によって出された simplified TVD method について簡単に説明する。

まず 1 次元での保存形の方程式 $\partial u(x, t)/\partial t = -\partial w(u, x)/\partial x$ を考える。ここで u 、 w は一般に m 次元のベクトルである。simplified TVD method の手順は以下の通りである。

$$u_j^{(1)} = u_j^n - \kappa(w_j^n - w_{j-1}^n), \quad (5.79)$$

$$u_j^{(2)} = \frac{1}{2}[u_j^n + u_j^{(1)} - \kappa(w_{j+1}^{(1)} - w_j^{(1)})], \quad (5.80)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^{(2)} + D_{j+1/2}^n - D_{j-1/2}^n, \quad (5.81)$$

ここで $\kappa \equiv \Delta t/\Delta x$ 、上付き添え字の n は時間ステップを下付き添え字の j はメッシュの位置を示している。最後の項の $D_{j+1/2}^n$ は以下のように定義される。

$$D_{j+1/2}^n = [\bar{K}_{j+1/2}^+(\nu, r_j^+) + \bar{K}_{j+1/2}^-(\nu, r_{j+1}^-)](u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (5.82)$$

$$\nu = \max(|c_m|)\kappa \quad (5.83)$$

$$\bar{K}^\pm(\nu, r^\pm) = 0.5C(\nu)[1 - \phi(r^\pm)], \quad (5.84)$$

$$\phi(r) = \begin{cases} (2r, 1) & (r > 0) \\ 0 & (r \leq 0), \end{cases} \quad (5.85)$$

$$C(\nu) = \begin{cases} \nu(1 - \nu) & (\nu \leq 0.5) \\ 0.25 & (\nu > 0.5), \end{cases} \quad (5.86)$$

$$r_j^+ = (\Delta u_{j-1/2}^n, \Delta u_{j+1/2}^n) / (\Delta u_{j+1/2}^n, \Delta u_{j+1/2}^n), \quad (5.87)$$

$$r_j^- = (\Delta u_{j-1/2}^n, \Delta u_{j+1/2}^n) / (\Delta u_{j-1/2}^n, \Delta u_{j-1/2}^n) \quad (5.88)$$

$$\Delta u_{j+1/2}^n = u_{j+1}^n - u_j^n \quad (5.89)$$

c_j は各波の速度、 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ である。このスキームは Lax-Wendroff スキームに拡散項を付け加えたようなものとみなすことができる⁶。また、directional splitting method を用いてこのスキームを 2 次元に拡張したところ、弱い数値不安定性の発生が見られた。そこでこの不安定性を避けるため、我々のコードでは以下に示すように 2 つの係数 $\bar{K}^+$ と $\bar{K}^-$ を組み合わせて 1 つの係数 $\bar{K}$ として扱うように改良している。

$$\bar{K}(\nu, r^+, r^-) = 0.5C(\nu)[1 - \phi(r^+, r^-)] \quad (5.90)$$

$$\phi(r^+, r^-) = \max[0, (2r^+, r^-, 1), (2r^-, r^+, 1)] \quad (5.91)$$

5.3.2 保存量からの基本量の導出

保存形で記述された GRMHD の基礎方程式 (3+1 形式) を時間発展している間、各時間ステップごとに保存量 D 、 $\hat{\mathbf{P}}$ 、 ϵ 、 $\hat{\mathbf{B}}$ のみを得る。さらに時間発展を進めるためには 方程式 (5.36)-(5.38) と (5.40) を使ってこれら保存量 D 、 $\hat{\mathbf{P}}$ 、 ϵ 、 $\hat{\mathbf{B}}$ から基本量 γ 、 $\hat{\mathbf{v}}$ 、 p を計算しなければならない。これをするためには未知変数を $x \equiv \gamma - 1$ と $y \equiv \gamma(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{B}})/c^2$ とする連立非線形代数方程式

$$\begin{aligned} & x(x+2) \left[\Gamma R x^2 + (2\Gamma R - d)x + \Gamma R - d + u + \frac{\Gamma}{2} y^2 \right]^2 \\ & = (\Gamma x^2 + 2\Gamma x + 1)^2 [f^2(x+1)^2 + 2\sigma y + 2\sigma x y + b^2 y^2], \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma(R - b^2)x^2 + (2\Gamma R - 2\Gamma b^2 - d)x + \Gamma R - d + u - b^2 + \frac{\Gamma}{2} y^2 \right] y \\ & = \sigma(x+1)(\Gamma x^2 + 2\Gamma x + 1), \end{aligned} \quad (5.93)$$

を解かなくてはならない。ここで $R = D + \epsilon/c^2$ 、 $d = (\Gamma - 1)D$ 、 $u = (1 - \Gamma/2)\hat{\mathbf{B}}^2/c^2$ 、 $f = \hat{P}/c$ 、 $b = \hat{B}/c$ 、 $\sigma = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{P}}/c^2$ である。これらの代数方程式に含まれている磁場 $\hat{\mathbf{B}}$ を取ると、Duncan & Hughes (1994) によって導かれた相対論的流体力学のものになり、方程式 (5.93) は非常に簡単な式となる。これらの代数方程式を 2 変数の Newton-Raphson iteration method を用いて各 cell ごとに解く。そして各基本量は x 、 y 、 D 、 $\hat{\mathbf{P}}$ 、 ϵ 、 $\hat{\mathbf{B}}$ を使って

$$\gamma = 1 + x, \quad (5.94)$$

$$p = \frac{(\Gamma - 1)[\epsilon - x D c^2 - (2 - 1/\gamma^2)B^2/2 + (cy/\gamma)^2/2]}{[\Gamma x(x+2) + 1]} \quad (5.95)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\hat{\mathbf{P}} + (y/\gamma)\hat{\mathbf{B}}}{D + \{\epsilon + p + B^2/2\gamma^2 + (cy/\gamma)^2/2\}/c^2} \quad (5.96)$$

から簡単に求めることができる。この計算法は SRMHD シミュレーション (Koide, Nishikawa, & Mutel 1996; Koide 1997) で用いられているものと同じである。

⁶式 (5.79)-(5.81) を見れば分かるが、この simplified TVD method は左右非対称の数値解法になっている。そのため、衝撃波管のテスト計算などで、右向き (j が大きくなる向き) の衝撃波の伝播の計算と左向き (j が小さくなる向き) の衝撃波の伝播の計算とで計算限界に差が出るといった問題が発生している。即ち、右向きの衝撃波伝播の計算ができるのに、同じ問題 (同じ初期条件) で左向きの衝撃波伝播の計算ができないのである。これを解決するには、風上差分法のように流れに対する上流、下流を判別し、常に一定の方向で差分を取るようにすればよいであろう。

5.4 シミュレーションの計算例

5.4.1 宇宙ジェット

宇宙ジェットはジェット状に細く絞られたプラズマガスの噴流である。AGNで見られる宇宙ジェットは光速の95%以上の速度を持っている。このような速い速度を持つジェットがどのようにして形成され、加速されているのか大きな問題となっている。AGNで見られるような宇宙ジェットは中心のブラックホール近傍に渦巻いている降着円盤から噴き出していると考えられている。Koide, Shibata, & Kudoh (1998,1999)、Koide et al. (2000)、Aoki et al. (2004) ではこの宇宙ジェットの形成、加速に関して GRMHDコードを用いてシミュレーションしている。ここではカーブラックホール周りを回る降着円盤から形成される宇宙ジェットの GRMHD シミュレーションを行った Koide et al. (2000) を元にその初期条件と結果を簡単に紹介する。

初期は以下のような状況を考える。中心にカーブラックホールがあり、その周りをケプラー速度で回転する幾何学的に薄く、冷たいプラズマガスの降着円盤が回っているとする。このとき、ブラックホール周りのケプラー速度は

$$v_K = \frac{c}{\sqrt{2(r/r_s - 1)}}, \quad (5.97)$$

で与えられる⁷。降着円盤の周りには高温で希薄なプラズマガス (コロナ) がある。コロナはブラックホールに向かって自由落下している⁸。磁場は降着円盤を貫く、大局一様磁場を仮定する。この磁場の分布はカーブラックホール周りの一様磁場を表す Wald 解 (Wald 1974) を使用する。Wald 解のベクトルポテンシャルは

$$A_\mu = \frac{B_0}{2}(g_{\mu 3} + 2ar_g g_{\mu 0}), \quad (5.98)$$

である。ここで B_0 は磁場の強さを示すパラメータである。Boyer-Lindquist 座標では、これは

$$\hat{B}_r = B_0 \frac{\cos \theta}{\sqrt{A}} \left[\delta + \frac{2r_g r(r^4 - (ar_g)^4)}{\Sigma^2} \right], \quad (5.99)$$

$$\hat{B}_\theta = -B_0 \sqrt{\frac{\delta}{A}} \sin \theta \left[r - r_g + \frac{r_g}{\Sigma^2} \{ (r^2 + (ar_g)^2 \Sigma + 2(ar_g)^2 \cos^2 \theta (r^2 - (ar_g)^2) \} \right], \quad (5.100)$$

で与えられる。この計算では $B_0 = 0.3(\rho_0 c^2)^{-1/2}$ とする。 ρ_0 は $r = 3r_S = 6r_g$ での初期コロナの密度である。

シミュレーションでは、降着円盤がブラックホールと共回転 ($a = 0.95$) と反回転 ($a = -0.95$) している場合で行っている。シミュレーションの時間発展の様子は図 5.1 で示されている。ブラックホールと共回転のときはシュバルツシルトブラックホールのときとほぼ同じく、磁場によって角運動量を失った円盤のガスはブラックホールに向かって落ち込む。その降着流は遠心力バリアによって止められ、衝撃波を形成する。形成した衝撃波は高いガス圧を生み、落ち込んでくるガスをジェットとして外側に噴き出す。このようにシミュレーションではガス圧によって加速された速いジェットとその外側に磁気圧によって加速された遅いジェットが形成された (図 5.1(d))。一方で、反回転の場合、ガス圧ジェットの内側でより強い磁気圧ジェットの形成が見られた (図 5.1(c))。これは、降着流が遠心力バリアによって止められることなく、ブラックホールまで回転しながら落ち込み、エルゴ領域で

⁷非相対論ではケプラー速度は $v_K = \sqrt{GM/r}$ である

⁸ブラックホールへの自由落下の定常解は Bondi & Hoyle (1944) で詳しく解析されている。このシミュレーションでの自由落下の場合の密度、圧力、速度分布は Koide et al. (1999) を参照。

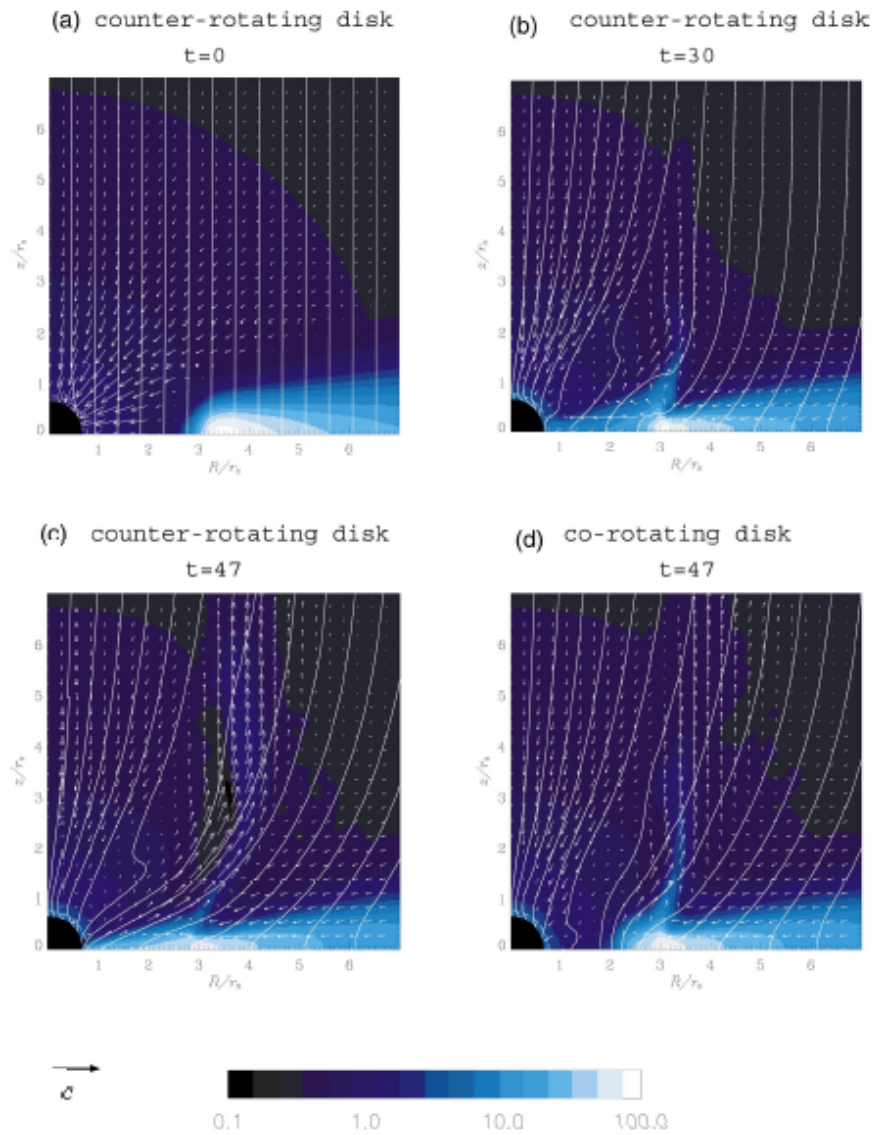


図 5.1: カーブラックホール周りを回る降着円盤からの宇宙ジェット的时间発展の様子。カラーは密度線は磁力線、矢印は速度を表している。磁場の効果によって降着円盤よりジェットは噴出している様子が分かる。(Koide et al. 2000)

の時空の引きずり効果によって強く捻られた磁場によってジェットとして噴出したものである。このように、降着円盤だけでなく、ブラックホール自身の回転の効果(時空の引きずりの効果)によってジェットが形成されるといった描像が GRMHD シミュレーションによって初めて示された。

5.4.2 ブラックホールからのエネルギーの引き抜き

前で示したように降着円盤から噴き出しているジェットのエネルギーは降着円盤の回転エネルギーである。それ以外の可能性としてブラックホールの回転エネルギーがある。このブラックホールの回転エネルギーを引き出しうることを初めて示したのは Penrose (1969) である。エルゴ領域で物質が逆方向の角運動量を持つ場合、物質のエネルギー (energy-at-infinity) は負になりうる。物質のエネルギーはカーブラックホールの周りの粒子の保存量の一つで、非相対論では静止質量エネルギー、運動エネルギー、重力エネルギーの和に相当する。エルゴ領域の外ではこの物質のエネルギーは必ず正となる。エルゴ領域内で正のエネルギーを持つ 2 つの粒子の角運動量を再配分することを考える。角運動量の再配分によって、一方の粒子に負のエネルギーを、もう一方の粒子に 2 つのエネルギーの和よりも大きい正のエネルギーを持つような状況を作る。その負のエネルギーを持つ粒子がブラックホールに落ち込み、正のエネルギーを持つ粒子がエルゴ領域から飛び出したとき、それはブラックホールの回転エネルギーが引き抜かれ、飛び去った粒子によって持ち出されたこととなる。このようにブラックホールの回転エネルギーを負の粒子を媒介にして引き抜く機構を“ペンローズ過程”と言う。また、Blandford & Znajek (1977) は Force-Free 条件下でのカーブラックホール周りでの磁場分布の定常軸対象の解を求め、ブラックホールからのエネルギー引き抜きの機構を示した。Koide et al. (2002)、Koide (2003) では GRMHD コードを用いてカーブラックホールからの磁気エネルギーの引き抜きについて数値的に調べ、“MHD ペンローズ過程”によるエネルギーの引き抜きの可能を示した。ここでは Koide (2003) を元に、その初期条件とシミュレーション結果について簡単に紹介する⁹。

初期条件として最大回転しているカーブラックホール ($a = 0.99995$) の周りに大局一様磁場と希薄なプラズマがある状況を考える。ブラックホール周りの希薄なプラズマは空間的に一様な密度 ρ_0 と圧力 $p_0 = 0.06\rho_0 c^2$ を持っている。大局一様磁場は Wald 解 (5.99)、(5.100) で与えられる。ここで $B_0 = 5.77\sqrt{\rho_0 c^2}$ とする。

図 5.2 はシミュレーションの時間発展の様子を示している。シミュレーション開始とともに、プラズマはブラックホールに向かって落ち込む (図 5.2A)。磁場は時空の引きずり効果によって捻られ、その捻れはアルフベン波としてプラズマの流れに逆らって磁力線に沿って外向きに伝播していく (図 5.2B)。特にブラックホールの地平面近くにできるエルゴ領域では磁場の捻れは強い (図 5.2C、D)。エルゴ領域内では磁場はブラックホールと同じ方向に曲げられる。曲げられた磁場は磁気張力によって元に戻ろうとするためエルゴ領域内のプラズマの角運動量を負にする (もしブラックホールの角運動量が正なら)。プラズマが失った角運動量は磁場によってエルゴ領域外に運ばれる。このように、磁場によるプラズマの角運動量の再配分によってペンローズ過程と同様にエルゴ領域内で負のエネルギー状態を取るプラズマが形成される可能性がある。負のエネルギーを持つプラズマがブラックホールに吸い込まれると、ブラックホールの全エネルギーが減少する。一方で、エルゴ領域から放出されたアルフベン波がプラズマの落下に逆らって外向きに伝播する。これはブラックホールのエネルギーが引き抜かれてアルフベン波として放出されたと見ることができる。このシミュレーションによって示された機構はペンローズ過程とよく似ている。それは、ペンローズ過程が粒子の角運動量の再配分によってエネルギーの引き抜きを行うのに対してこのシミュレーションで示されたのは磁気張力によ

⁹ この研究の日本語の解説は物理学会誌 2003 年 10 月号を参照

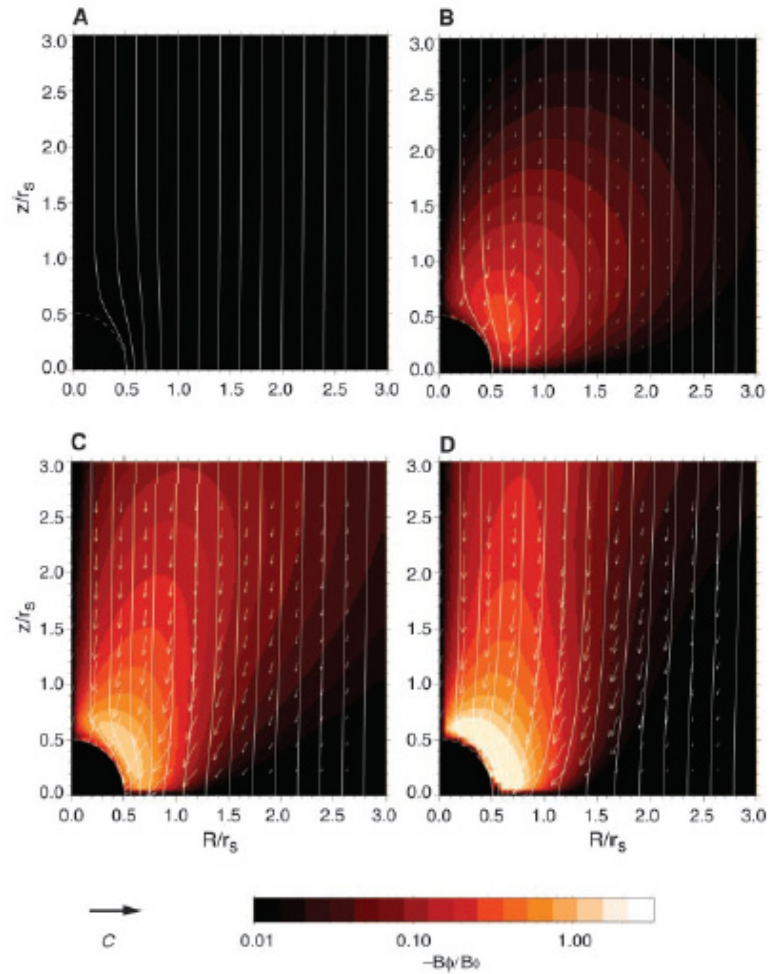


図 5.2: カーブブラックホールとその周りに一様な磁場と希薄なプラズマのある系での時間発展の様子。矢印はポロイダル速度、実線は磁力線、カラーは $-B_\phi/B_0$ を表している。時間とともに中心付近で磁場が強く捻られている様子が分かる。(Koide et al. 2002)

て角運動量の再配分を行っている点である。このような磁氣的な引き抜き機構を“MHD ペンローズ過程”(Hirokuni et al. 1992) と言う。

Koide et al. (2002)、Koide (2003) では GRMHD シミュレーションによって、磁場によるブラックホールの回転エネルギーの引き抜き機構とその可能性について示した。しかし、残念ながらこのシミュレーションでは、Boyer-Lindquist 座標を用いているため、角運動量の輸送はブラックホールの地平面を横切っていない。そのため本当にブラックホールのエネルギーが引き抜かれたのか見ることができていない。地表面の見かけの特異点を避ける座標として Kerr-Schild 座標がある。今後、このような座標系での計算が必要であろう¹⁰。

5.5 現状の問題点と今後

前節で示したように我々のコードは今までに宇宙ジェット(Koide, Shibata, & Kudoh 1998, 1999; Koide et al. 2000; Aoki et al. 2004) やブラックホールからのエネルギーの引き抜き(Koide et al. 2002; Koide 2003) やガンマ線バースト(Mizuno et al. 2004a, b) など様々な天体物理現象に応用され、新たな画像を描き出してきた。ここではあえて我々のコードの直面している問題点と相対論的 MHD コードの今後の発展について書いていく。

我々のコードの最大の問題点は非常に狭いパラメータ範囲でしか長く時間発展を追うことができない点である。例えば、光速に近い速度(ローレンツ係数 $\gamma > 3$) や強磁場中でのシミュレーションでは長く時間発展を追うことは難しいことが分かっている。我々のコードで行ったシミュレーションが止まるほとんどの原因は保存量から各基本量に戻すときに使用している Newton-Raphson iteration method で正しい解を見つけられない(収束しない)ためである。使用している基礎方程式が保存形である以上、保存量から各物理量への変換は避けては通れない問題である。現在我々は2変数の連立代数方程式まで式を組み合わせる Newton-Raphson iteration method を使用している点に問題があるのかもしれない。このことは次章で詳しく取り上げているが、我々の行っている2変数での連立代数方程式より Del Zanna et al. (2002) で用いられている1変数の代数方程式を Newton-Raphson iteration method で解く方法の方がより高いローレンツ係数での計算が可能であることが分かった。また Del Zanna et al. (2002) で用いている方法は、簡単なテスト計算ではローレンツ係数で $\gamma \sim 1000$ を超える計算も可能であることが分かった。

また、現在の問題を避ける方法として、基礎方程式の段階で保存形から非保存形へと基礎方程式を書き換えてしまうという方法がある。非保存形に式を書き下してしまえば、我々のコードで最も問題となっている保存量から各物理量への変換が必要なくなるのである。De Villiers & Hawley (2003) では、ZEUS コードを元に、このような非保存形の GRMHD 基礎方程式を用いた GRMHD コードを作り、ブラックホール周りの降着円盤の3次元シミュレーションで非常に長時間の計算を行っている。また非保存形でもっとも心配な点とされる物理量の保存精度に対しても De Villiers & Hawley (2003) では数%程度(質量では2%程度)のエラーである。もちろん行うシミュレーションモデルや使用する数値解法によってこの保存精度は異なるが、保存形では解けなかった非常に光速に近い状況下での計算や強磁場での計算などが可能になるかもしれない。

(一般) 相対論的 MHD コードの今後の発展としては大きく2つ課題がある。1つは理想 MHD 条件をはずすこと、即ち、電気抵抗を加えた相対論的 MHD コードの開発である。このようなシミュレーションは相対論的な状況下での磁気リコネクションの物理の解明など多くの研究において必要とされ

¹⁰Kerr-Schild 座標を用いたカーブラックホールからのエネルギーに引き抜きの GRMHD シミュレーションは McKinney & Gammie (2004) によって行われている。Kerr-Schild 座標での計量の与え方はこの論文を参考にして頂きたい。

ている。これをするためにはまずは基礎方程式の段階からの書き換えが必要である。特に今は磁場の時間発展だけを解いているが、理想 MHD 条件がなくなるため電場の時間発展も同時に解く必要がある。もう一つの課題は計量の時間発展を同時に解く GRMHD コードの開発である。現在行われているシミュレーションの多くはブラックホールの質量が周りの物質に対して非常に大きいためシミュレーションを行っている時間スケールではブラックホールの進化はほぼ無視できる状況である。しかしながら、例えば、大質量星の重力崩壊などで形成されたブラックホール周りでの物理を扱うときはシミュレーションを行う時間スケールでのブラックホールの進化を無視することは非現実的である。このような状況下でのシミュレーションを行うにはブラックホールの進化に伴う計量の時間発展も解く必要がある。これを行うためには計量の時間発展を表すアインシュタイン方程式を合わせて解かなければならない。これは非常に困難な課題である。ここでは詳しく述べることは控えるが、一般相対論的流体力学においてはここ 10 年で精力的に研究が行われ、大きな発展が見られる。特に日本では京大の中村卓史氏、東大の柴田大氏を中心に大きな成果を挙げてきている。それらに関しては日本語では 2002 年度理論懇シンポジウム集録を英語では Baumgarte & Shapiro (2003b) のレビューや Wilson & Mathews (2003) の教科書を参考にして頂きたい。また GRMHD においては非保存形ではあるが、Baumgarte & Shapiro (2003a) によってすでに計量の時間発展を含めた GRMHD 方程式が定式化されている。実際に GRMHD シミュレーションを行った結果が出てくるのは近い将来かもしれない。

この章の第 1 節でも述べたが、相対論的 MHD コードはまだ世界的にも数は少なく、特に一般相対論的 MHD コードにいたってはここ 5 年近く我々のコードが世界をリードしてきた。また RMHD コードの開発に関する論文は出ているが、その後実際に天体現象に応用した論文があまり出ていないものが多いように感じる。これは、テスト計算のような簡単な問題は解けるが、実際の天体現象のような複雑な問題ではうまく動いていない状況にあるのではないだろうか。先程も書いたように我々の使用しているコードには幾つか限界がある。しかし、実際の天体現象に応用され、現在もっとも成果をあげている GRMHD コードであるとも言える。我々の相対論的 MHD コードの方法がこれから相対論的 MHD コードを作ろうとしている人にとって参考になるものであることを願う。

参考文献

- [1] Balsara, D. 2001, ApJS, 132, 83
- [2] Baumgarte, T. W., & Shapiro, S. L. 2003b, ApJ, 585, 921
- [3] ———. 2003a, Phys. Rep. 376, 41
- [4] Blandford, R. D., & Znajek, R. 1977, MNRAS, 179, 433
- [5] Bondi, H., & Hoyle, F., 1944, MNRAS, 104, 273
- [6] Duncan, G. C., & Hughes, P. A. 1994, ApJ, 436, L119
- [7] Davis, S. F. 1984, NASA Contractor Rep. 172373, ICASE Rep., No. 84-20
- [8] Del Zanna, L., Bucciantini, N., & Londrillo, P. 2003, A&A, 400, 397
- [9] De Villiers, J. -P., & Hawley, J. F. 2003a, ApJ, 589, 458
- [10] ———. 2003b, ApJ, 592, 1060
- [11] De Villiers, J. -P., Hawley, J. F., & Krolik, J. H. 2003, ApJ, 599, 1238
- [12] De Villiers, J. -P., Hawley, J. F., Krolik, J. H., & Hirose, S. 2004, ApJ, in press (Astroph/0407092)
- [13] Font, J. A. 2003, LRR, 6, 4
- [14] Gammie, C., McKinney, J.C., & Tóth 2003, ApJ, 589, 444
- [15] Hirovani, K., Takahashi, M., Nitta, S-Y., & Tomimatsu, A. 1992, ApJ, 386, 455
- [16] Hirose, S., Krolik, J. H., De Villiers, J. -P., & Hawley, J. F. 2004, ApJ, 606, 1083
- [17] Koide, S. 1997, ApJ, 487, 66
- [18] Koide, S. 2003, Phys. Rev. D, 67, 104010
- [19] Koide, S., Meier, D. L., Shibata, K., & Kudoh, T. 2000, ApJ, 536, 668
- [20] Koide, S., Nishikawa, K.-I., & Mutel, R. L. 1996, ApJ, 463, L71
- [21] Koide, S., Shibata, K., & Kudoh, T. 1998, ApJ, 495, L63

- [22] ———. 1999, *ApJ*, 522, 727
- [23] Koide, S., Shibata, K., Kudoh, T., & Meier, D. L. 2002, *Science*, 295, 1688
- [24] Koldoba, A. V., Kuznetsov, O. A., & Ustyugova, G. V. 2002, *MNRAS*, 333, 932
- [25] Komissarov, S. S. 1999, *MNRAS*, 303, 343
- [26] Marti, J. M., & Müller, E. 2003, *LRR*, 6, 7
- [27] McKinney, J. C., & Gammie, C. F. 2004, *ApJ*, 611, 977
- [28] Mirabel, I. F., & Rodrigues, L. F. 1994, *Nature*, 371, 46
- [29] Mizuno, Y., Yamada, S., Shibata, K., & Koide, S. 2004a, *ApJ*, 606, 395
- [30] ———. 2004b, *ApJ*, in press
- [31] Penrose, R. 1969, *Nuovo Cimento I*, 252
- [32] Tingay, S. J., et al. 1995, *Nature*, 374, 141
- [33] Thorne, Kip S., Price, R. H., & Macdonald, D. A. 1986, *Membrane Paradigm* (Yale University Press, New Haven and London)
- [34] van Putten, M. H. P. M. 1993, *J. Comput. Phys.*, 105, 339
- [35] Wald, R. M., 1974, *Phys. Rev. D*, 10, 1680
- [36] Wilson, J. R. 1977, in *Proceedings of the Marcel Grossman Meeting*, ed. R. Ruffini (Amsterdam: North Holland), 393
- [37] Wilson, J. R. & Mathews, G. J. 2003, *Relativistic Numerical Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge)
- [38] Yokosawa, M. 1993, *PASJ*, 45, 207
- [39] 宇宙シミュレーション・ネットラボラトリーシステム開発グループ 2004, 天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール 講義テキスト
- [40] 小出真路 2003, *日本物理学会誌*, 58, 743
- [41] 柴田大 2002, 2002 年度理論懇シンポジウム集録
- [42] 藤井孝蔵 1994, *流体力学の数値計算法* (東大出版会, 東京)