

第 6 章

相対論的磁気流体における保存量からの基本量の導出

千葉大学 富高 真

6.1 はじめに

相対論的 Jet のシミュレーション等のため、近年相対論的磁気流体 (RMHD) シミュレーションが行われるようになってきた。この章では基本変数として、エネルギー運動量等の保存変数を用いた RMHD コードについて紹介する。非相対論的な場合との大きな違いは、保存変数から圧力、速度などの基本変数に変換する際 iteration が必要になることであり、この部分の計算コストが最も大きくなる。また現在、Black Hole 付近の光速に非常に近い速度で動く磁気流体 ($\gamma \geq 10$) における iteration (反復法) の解が収束しないという問題に直面している。そこで現在我々の使用している 2-D Newton's method (Koide et al. : 1999) と、さらに収束が良いとされる 1-D Newton's method (Del Zanna et al. : 2002) についての収束範囲や最大収束回数について比較した結果を報告する。計算スキームとして、Lax-Wendroff 法と簡易化した Riemann solver を用いる方法 (HLL) を使用した。

6.2 相対論的磁気流体力学方程式(保存系)

相対論的に動く理想的な流体・磁気流体方程式は非相対論的な場合と同様、保存系で次の様に記される。(ここでは $c = 1$, $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$, MKS 単位系とする) <<参考 : Koide (1999) >>

- 粒子数保存の法則

$$\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) = 0 \quad (6.1)$$

- 運動量・エネルギー保存の法則

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (6.2)$$

- Maxwell 方程式

$$\partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0 \quad (6.3)$$

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = -J^{\nu} \quad (6.4)$$

ここで $g^{\mu\nu}$ (メトリック), $x^\nu = (t, x^i)$, $u^\nu = (\gamma, \gamma v^i)$ (四元ベクトル)
 $F_{\mu\nu}$ (電地場テンソル), J^ν (四元電流密度), ρ (固有密度), p_r (固有圧力)
 $e = \rho c^2 + p_r/(\Gamma - 1)$ (固有エネルギー), Γ (比熱比), γ (ローレンツ係数)
 ∇_μ (共変微分), $\mu = \nu = (0, 1, 2, 3)$, $i = (1, 2, 3)$ とする。

相対論的磁気流体の運動量エネルギーテンソル $T^{\mu\nu}$ は次のように記される。

$$T^{\mu\nu} = p_r g^{\mu\nu} + (e + p_r) u^\mu u^\nu + F_\sigma^\mu F^{\nu\sigma} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa} = T^{\nu\mu} \quad (6.5)$$

簡単に考えるため特殊相対論 ($g^{\mu\nu} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1] = \eta^{\mu\nu}$) で考える。
 $\omega = e + p_r$, $b^\mu = [\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}), \mathbf{B}/\gamma + \gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v}]$ とすると (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) は次のように書き換えられる。<<参考 : Del Zanna (2002) >>

$$\partial_\mu(\rho u^\mu) = 0 \quad (6.6)$$

$$\partial_\mu[(\omega + |b|^2)u^\mu u^\nu - b^\mu b^\nu + (p_r + \frac{|b|^2}{2})\eta^{\mu\nu}] = 0 \quad (6.7)$$

$$\partial_\mu(u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu) = 0 \quad (6.8)$$

ここで

$$D = \gamma\rho \quad (6.9)$$

$$\mathbf{P} = \omega\gamma^2\mathbf{v} + \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (6.10)$$

$$\varepsilon = \omega\gamma^2 - p_r - D + \frac{1}{2}(B^2 + E^2) \quad (6.11)$$

とすると保存量 $\mathbf{U} = (D, \mathbf{P}, \varepsilon, \mathbf{B})$ から

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \quad (6.12)$$

$$(6.13)$$

このように相対論磁気流体も保存系で数値解析することができる。

6.3 反復解法の必要性

なぜ相対論では iteration (反復解法による保存量からの基本量の導出) が必要であるのか?

まず、非相対論における保存量 (ρ , \mathbf{P} , ϵ , \mathbf{B}) から基本量 (p_r , \mathbf{v}) の導出について考える。これは簡単で次の様に記される。

$$p_r = (\Gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{B^2}{2}\right) \quad (6.14)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{\rho} \quad (6.15)$$

ここで \mathbf{P} は運動量ベクトル、 $E = \frac{v^2}{2} + \frac{p_r}{(\Gamma - 1)\rho}$ は全エネルギーとする。

次に相対論である場合、保存量 \mathbf{U} を決定した後、次のように基本量 (p_r , \mathbf{v} , ρ) を導出する。

$$p_r = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma(\gamma^2 - 1) + 1} \left[\epsilon - (\gamma - 1)D - \frac{B^2}{2}\left(2 - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^2}{2} \right] \quad (6.16)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{D + \epsilon + p_r + \frac{B^2}{2\gamma^2} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^2}{2}} \quad (6.17)$$

このように相対論の場合、簡単に速度と圧力が求まらないために iteration が必要となりその分の計算コストがかかってしまう。

6.4 2-D Newton's method (KO : Koide et al. 1999)

前に述べたように保存量から基本量を導出する際、相対論では (6.16), (6.17) で見られるように簡単には求めることが出来ない。そこで Koide(1999) の 2-D Newton's method について紹介する。

(6.16), (6.17) を $X = \gamma - 1$, $Y = \gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})$ を使って書き換えると

$$p_r = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma X(X + 2) + 1} \left[\epsilon - XD - \frac{B^2}{2}\left(2 - \frac{1}{(1 + X)^2}\right) + \frac{Y^2}{2(1 + X)^2} \right] \quad (6.18)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P} + \frac{Y}{1 + X}\mathbf{B}}{D + \epsilon + p_r + \frac{B^2}{2(1 + X)^2} + \frac{Y^2}{2(1 + X)^2}} \quad (6.19)$$

となる。(6.19) に (6.18) を代入した \mathbf{v} に \mathbf{P} との内積 ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}$)、 \mathbf{B} との内積 ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}$) と ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$) を使用すると

$$\begin{aligned} Y[\Gamma(a - \beta^2)X^2 + (2\Gamma a - 2\Gamma\beta^2 - d)X + \Gamma a - d + b - \beta^2 + \frac{\Gamma Y^2}{2}] \\ = (\Gamma X^2 + 2\Gamma X + 1)\sigma(X + 1) \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} X(X + 2)[a\Gamma X^2 + (2\Gamma a - d)X + \Gamma a - d + b + \frac{\Gamma Y^2}{2}]^2 \\ = [\tau^2(1 + X)^2 + Y^2\beta^2 + 2\sigma(1 + X)Y](\Gamma X^2 + 2\Gamma X + 1)^2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

ここでは次の変数を使った。

$$a = D + \varepsilon \quad d = (\Gamma - 1)D \quad b = (1 - \frac{\Gamma}{2})B^2 \quad \tau = |\mathbf{P}| \quad \beta = |\mathbf{B}| \quad \sigma = \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}$$

(6.20), (6.21) より X と Y だけの関数になっていることがわかる。2-D Newton's method を使用し X と Y を求めることにより、(6.9), (6.18), (6.19) から基本量 (ρ , p_r , \mathbf{v}) を導出することができる。

ここで 2-D Newton's method とは関数 $f(X, Y) = 0$ $g(X, Y) = 0$ が存在するとき、

$$\begin{aligned} f(X + \delta X, Y + \delta Y) &= f(X_0, Y_0) + \frac{df(X_0, Y_0)}{dX} \delta X_1 + \frac{df(X_0, Y_0)}{dY} \delta Y_1 = 0 \\ g(X + \delta X, Y + \delta Y) &= g(X_0, Y_0) + \frac{dg(X_0, Y_0)}{dX} \delta X_1 + \frac{dg(X_0, Y_0)}{dY} \delta Y_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{df}{dX} & \frac{df}{dY} \\ \frac{dg}{dX} & \frac{dg}{dY} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(X_0, Y_0) \\ g(X_0, Y_0) \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

このようにして $X_1 = X_0 + \delta X_1$, $Y_1 = Y_0 + \delta Y_1$ を求め、さらに $f(X_1 + \delta X_2, Y_1 + \delta Y_2) = 0$, $g(X_1 + \delta X_2, Y_1 + \delta Y_2) = 0$ とし同様に X_2, Y_2 を求めていく。何度か繰り返す $\Delta = (\delta X_i^2 + \delta Y_i^2)^{\frac{1}{2}} \sim 0$ となるところで $X_{next} = X_0 + \delta X_1 + \dots + \delta X_i$, $Y_{next} = Y_0 + \delta Y_1 + \dots + \delta Y_i$ とし、この値を使用して以下のようにして基本量を導き出す。

$$\gamma_{next} = 1 + X \quad (6.23)$$

$$p_{r \ next} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma X(X + 2) + 1} \left[\varepsilon - DX - \frac{B^2}{2} \left(2 - \frac{1}{(X + 1)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{X + 1} \right)^2 \right] \quad (6.24)$$

$$\mathbf{v}_{next} = \frac{\mathbf{P} + \frac{Y\mathbf{B}}{1+X}}{D + \varepsilon + p_r + \frac{B^2}{2(1+X)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{1+X}\right)^2} \quad (6.25)$$

6.5 1-D Newton's method (DZ : Del Zanna et al. 2002)

6.5.1 Del Zanna の 1-D Newton's method

この方法は前節同様、反復法 (Newton's method) を使うのだが、1 変数だけを使用する。Del Zanna et al. (2002) によると、この方法を使うと光速に非常に近い磁気流体 ($\gamma_{max} = 1000$) でも収束すると記されている。以下、この方法について紹介する。

(6.9),(6.10),(6.11) に注目しよう。 $\omega\gamma^2 = W$ とすると次のように書き下すことができる。

$$D = \gamma\rho \quad (6.26)$$

$$\mathbf{P} = (W + B^2)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \quad (6.27)$$

$$\varepsilon = W - p_r - D + \frac{1}{2}[B^2 + v^2B^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^2] \quad (6.28)$$

(6.27) の 2 乗を取ると

$$W^2v^2 + (2W + B^2)B^2v_{\perp}^2 - P^2 = 0 \quad (6.29)$$

ここで

$$B^2v_{\perp}^2 = B^2v^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^2 \quad (6.30)$$

とする。また (6.27) より

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{W + B^2}[\mathbf{P} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}] \\ &= \frac{1}{W + B^2}[\mathbf{P} + \frac{S}{W}\mathbf{B}] \end{aligned} \quad (6.31)$$

ここで $S = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}) = W(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})$ である。(6.31) を 2 乗を取ると

$$v^2 = \frac{1}{(W + B^2)^2} \left[P^2 + \frac{S^2}{W^2} B^2 + \frac{2S}{W} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}) \right] \quad (6.32)$$

これを使って

$$\begin{aligned} B^2 \mathbf{v}_\perp^2 &= \frac{B^2 P^2 - S^2}{(W + B^2)^2} \\ &= \frac{T^2}{(W + B^2)^2} \end{aligned} \quad (6.33)$$

ここで $T^2 = B^2 P^2 - S^2$ である。(6.28) について (6.33) を代入すると

$$W - p_r - D + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} \frac{T^2}{(W + B^2)^2} - \varepsilon = 0 \quad (6.34)$$

$$\omega = \rho + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} p_r = \rho + \Gamma_1 p_r \Leftrightarrow p_r = \frac{1}{\Gamma_1} [(1 - v^2)W - \rho]$$

を使って

$$\left[\left(1 - \frac{1 - v^2}{\Gamma_1}\right)W + \frac{\rho}{\Gamma_1} - D + \frac{1}{2} B^2 - \varepsilon \right] (W + B^2)^2 + \frac{T^2}{2} = 0 \quad (6.35)$$

このことから W は v^2 だけの関数であることが分かる。すなわち、(6.29) に (6.33) を代入した

$$W^2 v^2 + (2W + B^2) \frac{T^2}{(W + B^2)^2} - P^2 = 0$$

に関して、 $v^2 = \xi$ とし

$$F(\xi) = W^2 \xi + (2W + B^2) \frac{T^2}{(W + B^2)^2} - P^2 \quad (6.36)$$

について、前節と同様 Newton' method により解くとよいことが分かる。変数が W と ξ の二つあるように思えるが、(6.35) について Cardano による三次方程式を解くことで W の値を保存量から決定することができる。 $F'(\xi)$ は簡単に求めることができ

$$F'(\xi) = W^2 + 2WW' \left[\xi - \frac{T^2}{(W + B^2)^2} \right] \quad (6.37)$$

$$\delta \xi_1 = - \left(\frac{dF(\xi_0)}{d\xi} \right)^{-1} F(\xi_0) \quad (6.38)$$

前節と同様に反復させて ξ_{next} を求めることができる。

6.5.2 Cardano's method

<<参考 : internet page Cardano による三次方程式の解法>>
 ここで Cardano の三次方程式について触れておく。次の三次方程式を考える。

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (6.39)$$

ここで

$$y = x + \frac{a}{3}$$

とおいて 2 次の項に落す。すると

$$y^3 + 3py + q = 0 \quad (6.40)$$

となる。ここで

$$p = -\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3}, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

である。いま、2 つの未知数 (u, v) を導入して

$$y = u + v$$

とおいて (6.40) に代入すれば

$$(u^3 + v^3 + q) + 3(u + v)(uv + p) = 0$$

となる。 u, v に関する連立方程式

$$u^3 + v^3 + q = 0, \quad (uv + p) = 0 \quad (6.41)$$

の解 (u, v) が求められれば、 $y = u + v$ は方程式の解となる。さらに 1 の 3 乗根 $w_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$, $w_2 = (-1 - \sqrt{3}i)/2$ をとれば、 (uw_1, vw_2) (uw_2, vw_1) も解となる。さらに $(y - (u + v))(y - (uw + vw^2))(y - (uw^2 + vw)) = y^3 + 3py + q$ となるから

$$\begin{cases} y_1 = u + v \\ y_2 = uw_1 + vw_2 = u\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) + v\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \\ y_3 = uw_2 + vw_1 = u\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) + v\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \end{cases}$$

(6.41) より $u^3 = \alpha$, $v^3 = \beta$ とおくと解くことができ、

$$u^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2} \quad (6.42)$$

$u_0 \neq 0$ ならば、 $v_0 = -\frac{p}{u_0}$ にすることができる。即ち、3 次方程式の解は

$$x_1 = u_0 + v_0 - \frac{a}{3}, \quad x_2 = u_0 w_1 + v_0 w_2 - \frac{a}{3}, \quad x_3 = u_0 w_2 + v_0 w_1 - \frac{a}{3} \quad (6.43)$$

6.5.3 Cardano 法に基づいて W を求める

(6.35) に注目する。 $\gamma\rho = D$ に注意する。

$$S_1 = 1 - \frac{1-v^2}{\Gamma_1}, \quad S_2 = \left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{\Gamma_1} - 1\right)D + \frac{B^2}{2} - \varepsilon \quad (6.44)$$

とすると簡単になって

$$[S_1 W + S_2](W + B^2)^2 + \frac{T^2}{2} = 0 \quad (6.45)$$

ここで

$$S_S = \frac{S_2}{S_1}, \quad S_a = 2B^2 + S_S, \quad S_b = B^4 + 2B^2 S_S, \quad S_c = B^4 S_S + \frac{T^2}{2S_1} \quad (6.46)$$

とすると (6.45) は

$$W^3 + (S_a)W^2 + (S_b)W + (S_c) = 0 \quad (6.47)$$

と書き下すことができる。これは (6.39) と形が同じであることから Cardano's methodにより W を求めることができる。すなわち

$$S_p = -\frac{(S_a)^2}{9} + \frac{S_b}{3} \quad (6.48)$$

$$S_q = \frac{2}{27}(S_a)^3 - \frac{S_a S_b}{3} + S_c \quad (6.49)$$

$$(S_u)^3 = \frac{1}{2} \left[-S_q \pm \sqrt{(S_q)^2 + 4(S_p)^3} \right] \quad (6.50)$$

$$S_v = -\frac{S_p}{S_u} \quad (6.51)$$

$$W = \begin{cases} S_u + S_v - \frac{S_a}{3} \\ S_u w_1 + S_v w_2 - \frac{S_a}{3} \\ S_u w_2 + S_v w_1 - \frac{S_a}{3} \end{cases} \quad (6.52)$$

以上のようにして解が3個でてくる。(6.35)の $(W + B^2)^2$ に注目しよう。 $T = 0$ のとき、 W の解で $W = -B^2$ が求まるのがわかる。この値は W の最小値である。そのため解は3個のうち最大のものを取ればよい。

6.5.4 W' に関する記述

W を解く際、0割りが起きてしまう可能性がある点に気をつけなければならない。わかりやすいように $W = S_u + S_v - \frac{S_a}{3}$ が解のときを考えてみる。これを ξ で微分して

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{d(S_u)}{d\xi} + \frac{d(S_v)}{d\xi} - \frac{1}{3} \frac{d(S_a)}{d\xi} \quad (6.53)$$

$\frac{d(S_u)}{d\xi}$ に注目すると

$$\frac{d(S_u)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-S_q + \sqrt{(S_q)^2 + 4(S_p)^3})} \right] \quad (6.54)$$

$$= \frac{d}{d\xi} \left[\sqrt[3]{S_{u3}} \right] = \frac{1}{3} (S_{u3})^{-\frac{2}{3}} \frac{d(S_{u3})}{d\xi} \quad (6.55)$$

また $\frac{d(S_{u3})}{d\xi}$ に注目すると

$$\frac{d(S_{u3})}{d\xi} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d(S_q)}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left[\sqrt{(S_q)^2 + 4(S_p)^3} \right] \right] \quad (6.56)$$

さらに $\frac{d(\sqrt{S_D})}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[\sqrt{(S_q)^2 + 4(S_p)^3} \right]$ は

$$\frac{d(\sqrt{S_D})}{d\xi} = \frac{1}{2\sqrt{S_D}} \frac{d(S_D)}{d\xi} \quad (6.57)$$

(6.55) と (6.57) をみれば一目瞭然であるとおりに、 $S_{u3} = 0$, $S_D = 0$ となると発散してしまう。 S_{u3} に関して展開して考えると

$$S_{u3} = 0 \Rightarrow (\sqrt{1-v^2} - \Gamma_1)D + \left(\frac{3}{2} - \Gamma_1\right)B^2 - \varepsilon = 0$$

このことから $S_{u3} = 0$ になることはあまり考えられない。

S_D に関して同様に

$$S_D = 0 \Rightarrow \frac{T^2}{2(S_1)} \left[\frac{T^2}{2(S_1)} - \frac{4}{27}(B^2 - S_S)^3 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow T^2 = B^2 P^2 - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}) = 0$$

すなわち $\mathbf{P} = 0$, もしくは $\mathbf{B} = 0$ のときに $S_D = 0$ となる。この場合はよく存在するので気をつけなければならない。

6.5.5 変換後の基本量の値

1-D Newton's methodから導き出された ξ の値からの基本量を求める方法は次の通りである。

$$\rho_{next} = D\sqrt{1-\xi} \quad (6.58)$$

$$p_{r next} = \frac{(1-\xi)W - \rho_{next}}{\Gamma_1} \quad (6.59)$$

$$\mathbf{v}_{next} = \frac{\mathbf{P} + \frac{S}{W}\mathbf{B}}{W + B^2} \quad (6.60)$$

6.6 HLL scheme

計算スキームとして Lax-Wendroff scheme と HLL scheme を用いた。HLL scheme について少しだけ触れておく。

6.6.1 なぜ HLL scheme なのか？

HLL Scheme は Lax-Wendroff scheme のように shock での数値散逸が小さく、変化の少ないところでは正確な値を示す。しかし Roe 法に比べてなまりが大きく、Roe 法とのハイブリッドのコードが望ましい。しかし HLL scheme は Roe 法のように 8 つの固有値・固有ベクトルを導き出す必要が無い、また相対論では固有値・固有ベクトルはローレンツ係数の存在により容易に導き出すことができない。これらの点から現在は HLL scheme を使用している。

6.6.2 HLL Flux の導出

<<参考 : P.Janhunen (1999) >>
 一次元の波を考える。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + S \quad (6.61)$$

ここで $U = U(x, t)$ は保存量、 $F = F(u)$ は流束、 $S = S(x, t)$ である。 $t = 0$ で U_L ($x < 0$), U_R ($x > 0$) とする。

また正の方向に最も速い波を b_R 、負の方向に最も遅い波を b_L とする。ある時間 τ において $L = (b_R - b_L)\tau$ とするとその空間での平均速度は

$$\bar{U}(t) \equiv \frac{1}{L} \int_{b_L\tau}^{b_R\tau} dx U(x, t) \quad (6.62)$$

(6.61) を積分すると次の式が得られる。

$$\bar{U}(\tau) = U_m + \Delta U_m \quad (6.63)$$

$$U_m = \frac{b_R U_R - b_L U_L - (F_R - F_L)}{b_R - b_L}, \quad \Delta U_m = \int_0^\tau dt \bar{S}(t) \quad (6.64)$$

一方

$$\bar{U}_L(\tau) = \frac{(\Delta x_L + b_L\tau)U_L - b_L\tau U_m}{\Delta x_L} = U_L - \frac{\tau}{\Delta x_L} (F_{HLL} - F_L) \quad (6.65)$$

ここで

$$F_{HLL} = F_L + b_L(U_m - U_L) \quad (6.66)$$

また

$$F_{HLL} = F_R + b_R(U_m - U_R) \quad (6.67)$$

(6.64) を (6.66), (6.67) に代入すると

$$F_{HLL} = \frac{b_L b_R (u_R - u_L) + b_R F_L - b_L F_R}{b_R - b_L} \quad (6.68)$$

これを新しい流束として適用する。すなわち

$$U(x, t+1) = U(x, t) - \frac{dt}{dx} [F_{HLL}(x) - F_{HLL}(x-1)] \quad (6.69)$$

1

6.7 テスト計算

CANSを元にして作ったコードを Balsara(2000) にそってコードテストした結果を報告する。

- scheme : 1次元 2-step Lax-Wendroff 又は HLL scheme
- クーラン条件 : 光速の 20 %
- 人工粘性 : CANS の組み込み人工粘性を使用
- iteration : 2D Newton's method 又は 1-D Newton's method

以下、2-step Lax-Wendroff scheme \Rightarrow LW, HLL scheme \Rightarrow HLL
 2-D Newton's method (Koide 1999) \Rightarrow KO
 1-D Newton's method (Del Zanna 2002) \Rightarrow DZ で表す。

6.7.1 Alfvén Wave の伝播

Koide (2003) によると相対論における Alfvén Wave は次のように示される。

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0 + \left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1} p_{r0} + B_0^2\right)/c^2}} \quad (6.70)$$

今、 $B_z = 0$ とおくと $B_0^2 = B_x^2 + B_y^2$ と書ける。Maxwell 方程式から、

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(v_y B_x) \quad (6.71)$$

また v_y に関して

$$v_y = A \cos \Omega \left(\frac{x}{v_A} + t \right) \quad (6.72)$$

¹HLL scheme の解説、プログラムについては共同研究者である浅野 栄治氏 (千葉大自然) にサポートをして頂きました。

とにおいて

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_y}{\partial t} &= B_x \cdot \frac{A\Omega}{v_A} \sin \Omega \left(\frac{x}{v_A} + t \right) \\ \Leftrightarrow B_y &= -B_x \cdot \frac{A}{v_A} \cos \Omega \left(\frac{x}{v_A} + t \right)\end{aligned}$$

t=0 とにおいて

$$\begin{aligned}v_y &= A \cos \Omega \left(\frac{x}{v_A} \right) = v_{al} \\ B_y &= -B_x \cdot \frac{A}{v_A} \cos \left(\frac{\Omega x}{v_A} \right) = -B_x \cdot \frac{A}{v_A} \cos(\kappa x) = B_{al}\end{aligned}\tag{6.73}$$

ここで $c = 1$, $\kappa = \frac{2\pi}{\text{全grid数}}$, $A = \text{const} \ll 1 \Rightarrow A = 0.01$ とする。

Test.1 Alfvén Wave の伝搬 ($\Gamma = 2.0$, $c = 1$, grid=807)

Test 1	ρ	v_x	v_y	v_z	p_r	B_x	B_y	B_z
Alfven	1.0	1.0	v_{al}	0.0	1.0	1.0	B_{al}	0.0

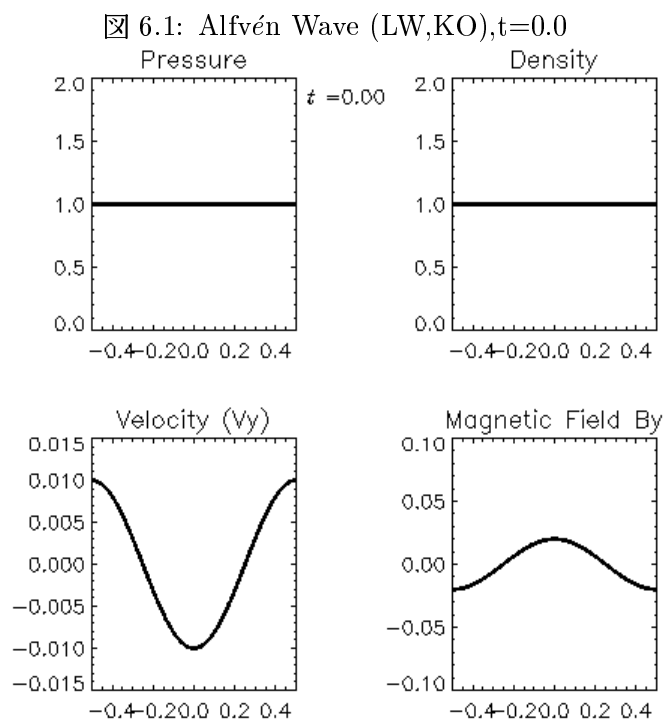


図 6.1, 6.3, 6.2, 6.4, からどちらも右から左へ Alfvén 波が伝わっているのが確認できた。このテストは HD から MHD へ拡張させる際、必ず確認すべき Test 問題である。

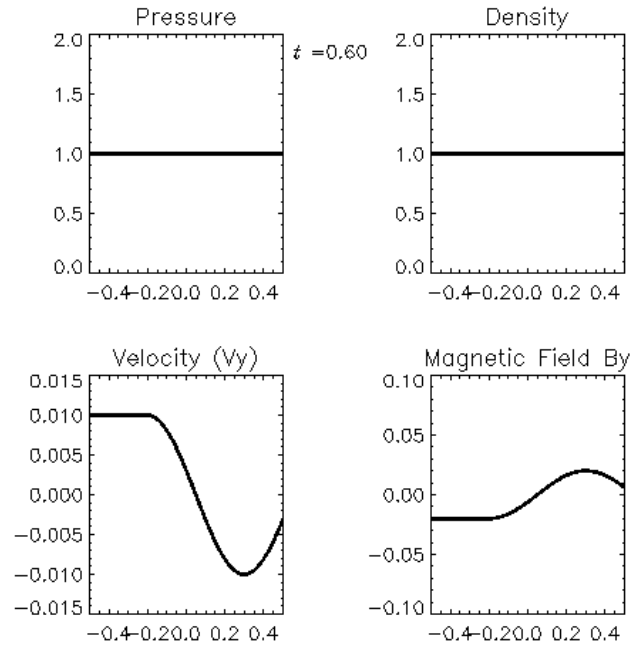
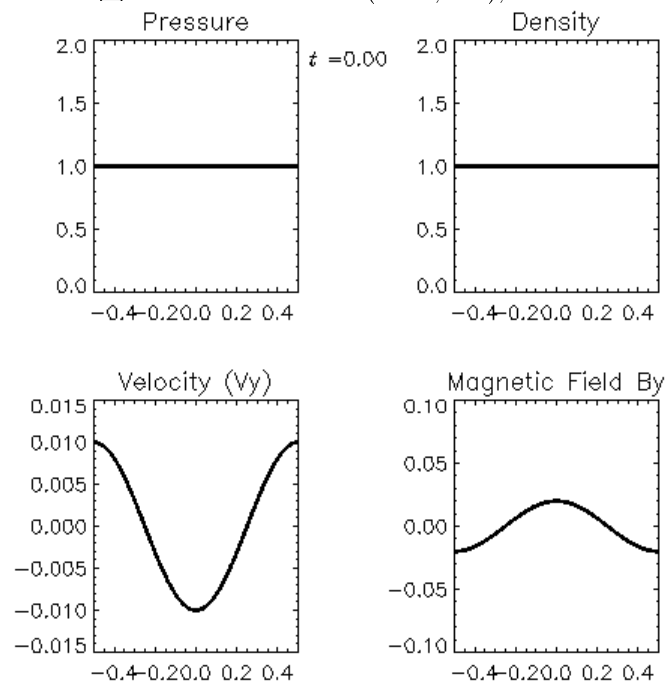
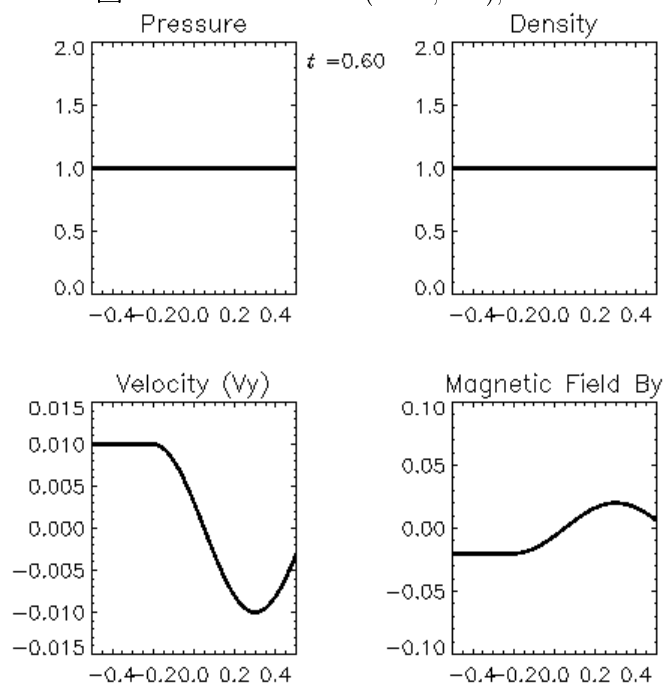
図 6.2: Alfvén Wave (LW,KO), $t=0.6$ 図 6.3: Alfvén Wave (HLL,KO), $t=0.0$ 

図 6.4: Alfvén Wave (HLL,KO), $t=0.6$ 

6.7.2 MHD Shock-tube Riemann problems

一番簡単な Test 問題として Brio & Wu (1988) を元にした Dinshaw Balsara(2000) の MHD Shock-tube 問題を解いた結果を記す。

Test.2 MHD Shock-tube 問題 ($\Gamma = 2.0$, $c = 1$, grid=807)

Test 2	ρ	v_x	v_y	v_z	p_r	B_x	B_y	B_z
Left	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.5	1.0	0.0
Right	0.125	0.0	0.0	0.0	0.1	0.5	-1.0	0.0

図 6.5, 図 6.6 の LW と HLL の違いに注目しよう。共に物理量の値、変化率といったものは Balsara (2000) と一致する。LW では特有の数値振動が見れるのに対し HLL では綺麗に解けている。また少ない grid 数で Shock をとらえている。DZ を用いて解いた場合では全く同じ結果がでたのでここでは省略する。

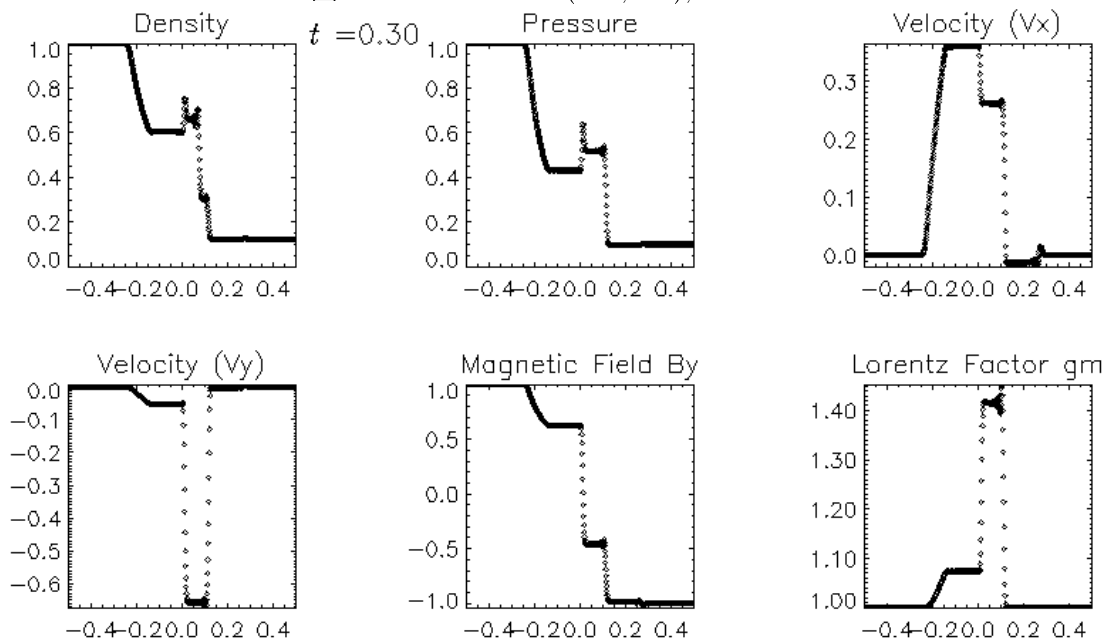
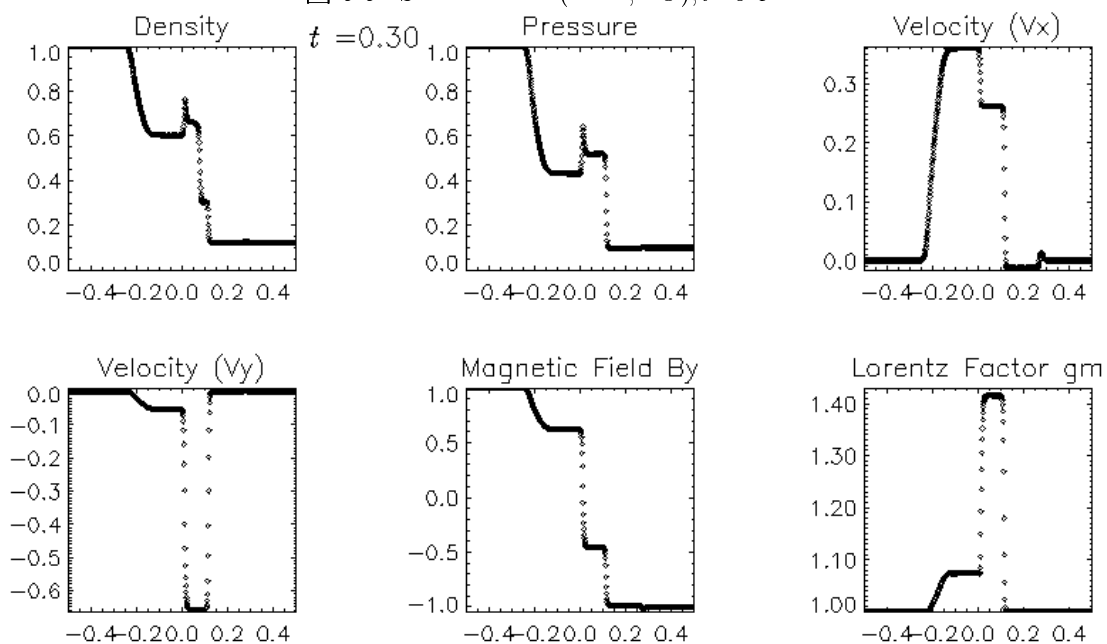
図 6.5: Shock Tube (LW,KO), $t=0.3$ 図 6.6: Shock Tube (HLL,KO), $t=0.3$ 

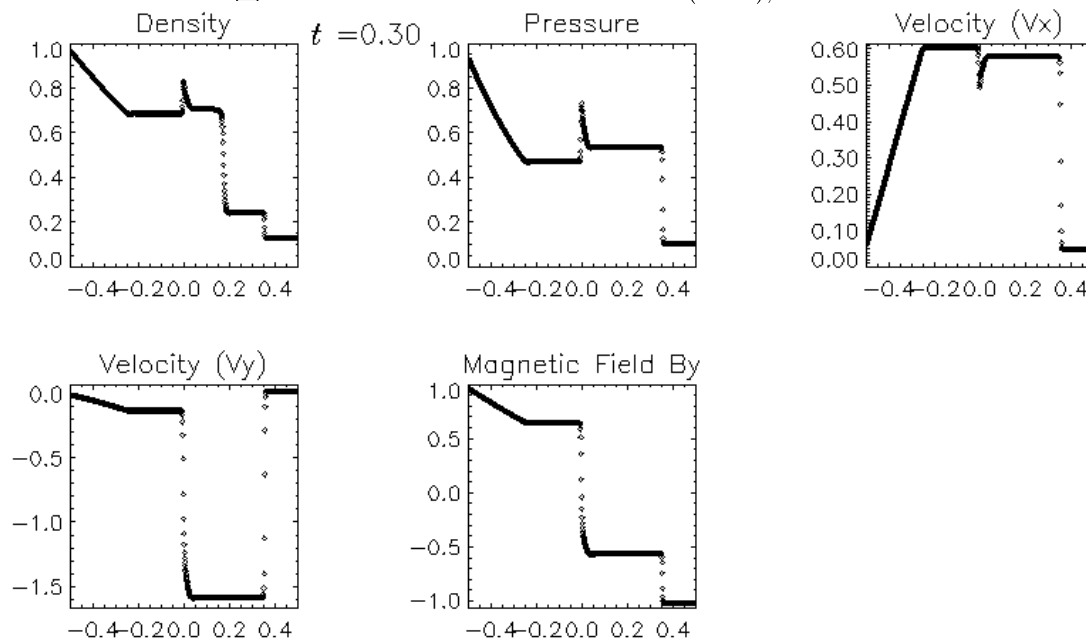
図 6.7: Non-relativistic Shock-tube (HLL), $t=0.3$ 

図 6.7はすべて同じ条件下での非相対論的 Shock-tube 問題を HLL で解いたものを表している。相対論的 Shock-tube 問題と比べると v_x の速度変化が大きくそれに伴って明らかに fast wave の速さが違うことがわかる。また X 方向の物理量の変化の幅も大きい。これは相対論的な効果、すなわち Lorentz 収縮の効果が現われたためである。ちなみにここでも LW 特性の数値振動はみられなく、LW に比べ HLL の方が少ない grid 数で Schok をとらえていた。

6.7.3 二種類の Blast Wave

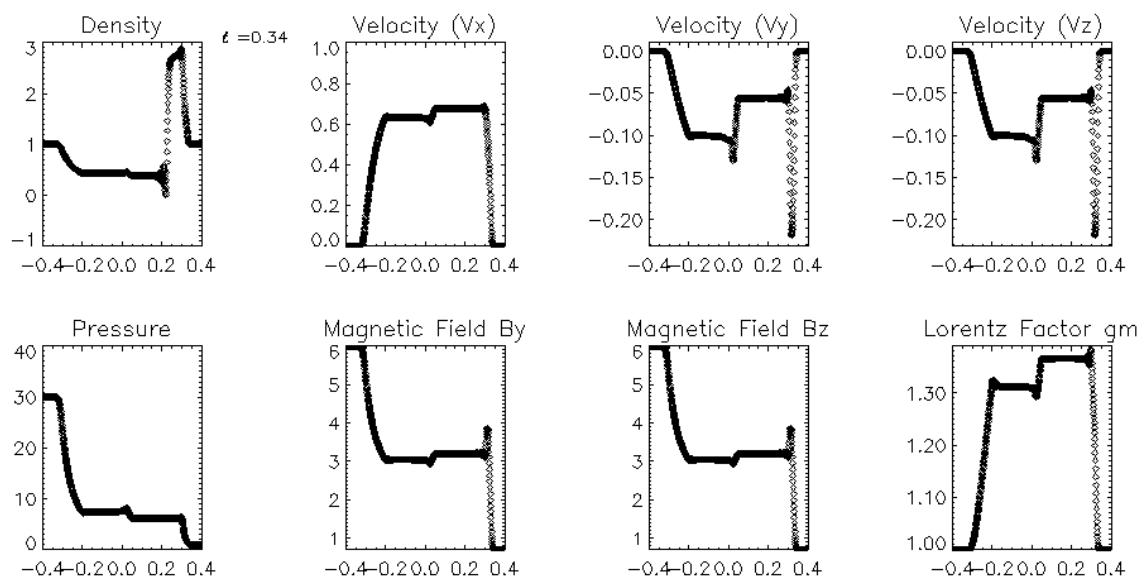
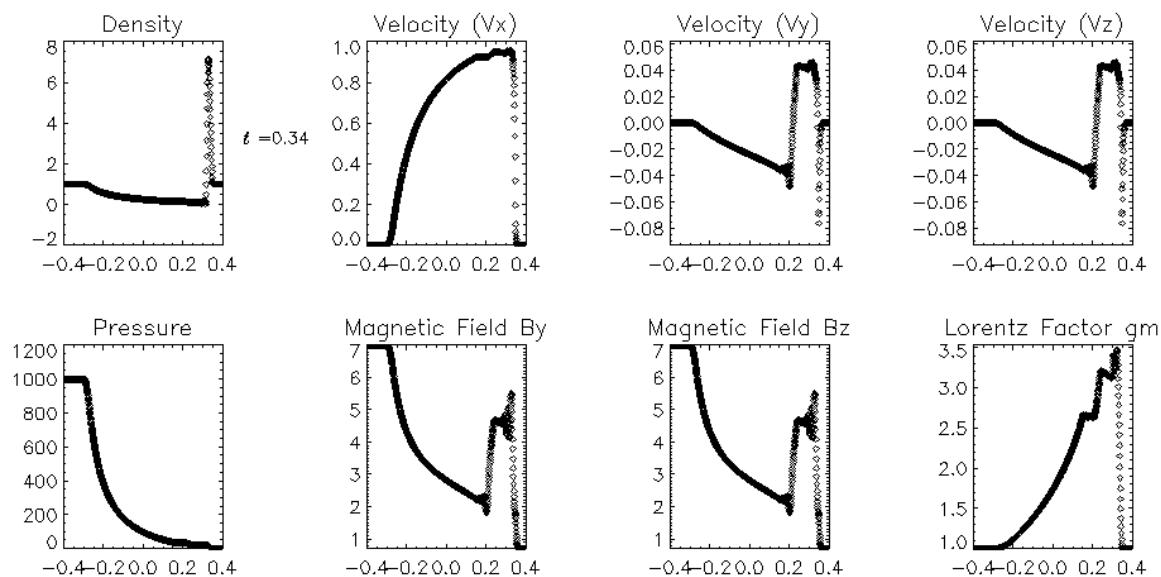
Balsara (2000) の Test 問題の二種類の Blast Wave を解いた結果を記す。ここでは LW scheme, DZ iteration を使用した。初期条件は以下の通りである。

Test.3 Blast Wave (moderate pressure) ($\Gamma = \frac{5}{3}$, $c=1$, grid=1001)

Test 3	ρ	v_x	v_y	v_z	p_r	B_x	B_y	B_z
Left	1.0	0.0	0.0	0.0	30.0	5.0	6.0	6.0
Right	0.125	0.0	0.0	0.0	1.0	5.0	0.7	0.7

Test.4 Blast Wave (strong pressure) ($\Gamma = \frac{5}{3}$, $c = 1$, grid=1001)

Test 4	ρ	v_x	v_y	v_z	p_r	B_x	B_y	B_z
Left	1.0	0.0	0.0	0.0	1000.0	10.0	7.0	7.0
Right	0.125	0.0	0.0	0.0	0.1	10.0	0.7	0.7

図 6.8: moderate pressure (LW,DZ), $t=0.3$ 図 6.9: strong pressure (LW,DZ), $t=0.3$ 

この二つの結果も Balsara (2000) と変化率、値ともに一致した。
 二つの密度の値を比べて見ると、strong pressure の fast wave と slow wave が潰れてしまっているのが分かる。それにともなって、Lorentz factor も急激に上昇し、速度も光速の 90 % になっている。これも先程同様、相対論的効果である Lorentz 収縮が顕著に見られるところである。

6.7.4 反復法(KO と DZ)の比較

KO と DZ の iteration を比較するために 5 つの Test を試みた。すべての Test において LW, HLL の scheme と KO, DZ の iteration を行った。初期条件である表 6.1 とシミュレーション結果である表 6.2 のグラフを見比べて欲しい。

表 6.1: 反復法のテスト ($\Gamma = \frac{5}{3}$, $c = 1$, grid=807)

		ρ	v_x	v_y	v_z	p_r	B_x	B_y	B_z
Test A	Left	1.0	0.9	0.0	0.0	1.0	0.5	1.0	0.0
Test A	Right	0.125	0.0	0.0	0.0	0.1	0.5	-1.0	0.0
Test B	Left	1.0	0.985	0.0	0.0	1.0	0.5	1.0	0.0
Test B	Right	0.125	0.0	0.0	0.0	0.1	0.5	-1.0	0.0
Test C	Left	1.0	0.9999995	0.0	0.0	1.0	0.5	1.0	0.0
Test C	Right	0.125	0.0	0.0	0.0	0.1	0.5	-1.0	0.0
Test D	Left	1.0	0.99999995	0.0	0.0	1.0	0.5	1.0	0.0
Test D	Right	1.0	0.99999995	0.0	0.0	1.0	0.5	1.0	0.0
Test E	Left	1.0	0.9	0.0	0.0	1.0	121.0	242.0	0.0
Test E	Right	1.0	0.9	0.0	0.0	1.0	121.0	1.0	0.0

表 6.2: 結果と反復法の最大収束回数 (単位 : 回)

	LW (KO)	LW (DE)	HLL(KO)	HLL(DE)
Test A	5	5	5	5
Test B	×	6	617	6
Test C	×	×	×	7
Test D	×	8	×	8
Test E	×	×	×	6

× は収束しない

- Test A

Test.2 の Shock-tube 問題の左側に初速、光速の 90 % を与えてみた。

図 6.10: $TestA(LW, KO), t = 0.1$

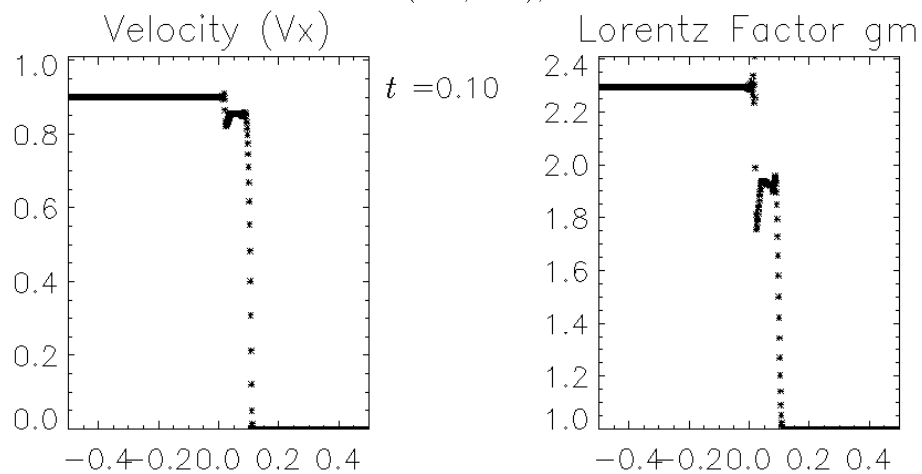
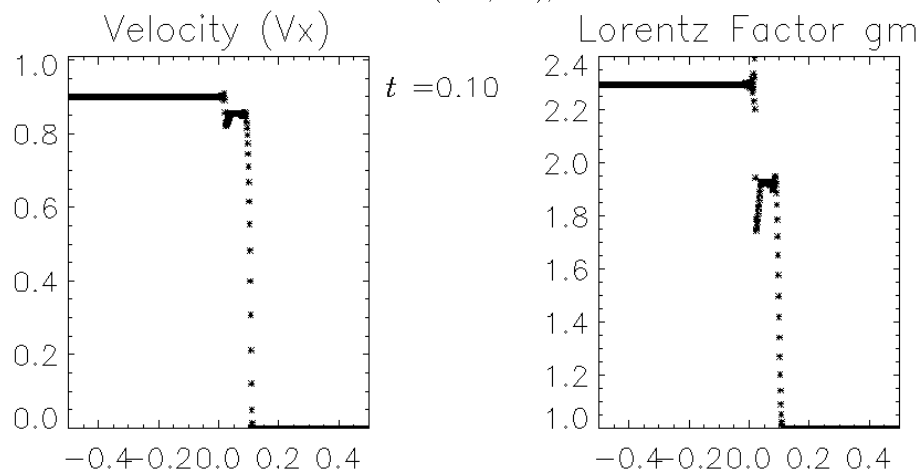


図 6.11: Test A (LW,DZ), $t=0.1$



この結果から見ても光速の 90 % 程度であるなら、KO, DZ のどちらも正常な値を示す。しかし気になるのは LW 特有の数値振動である。もう少し光速に近づけた場合、どのような結果が出るのか？

- Test B

A の条件のまま左側の速度を光速に近づけてみた。Test B の初速の値 ($v_x=0.985$) は、(LW,DZ) でのこれ以上正常に作動しない限界速度である。

図 6.12: Test B (LW,KO), $t=0.05$

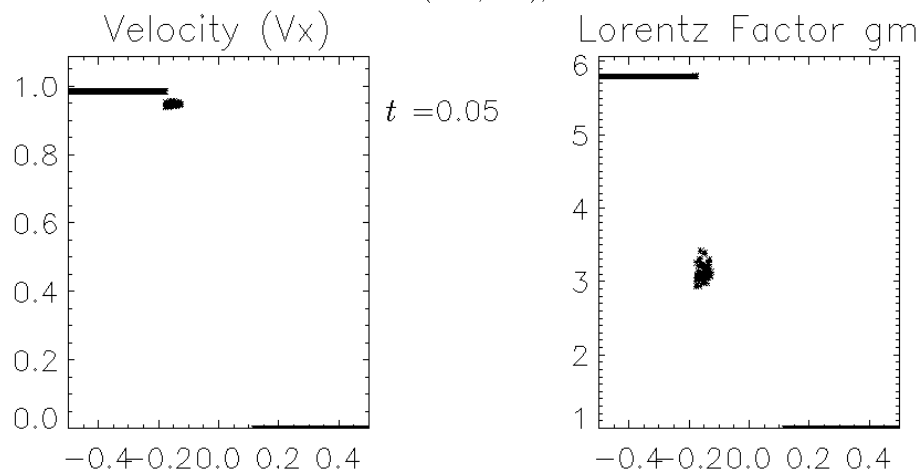
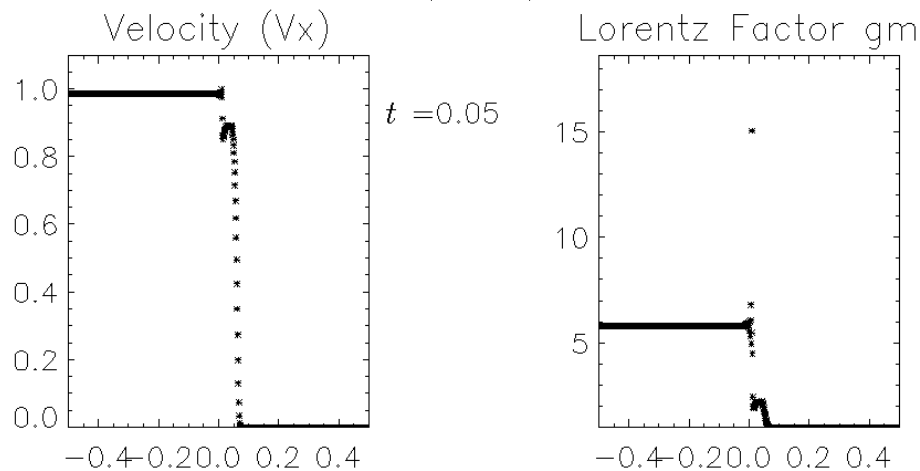


図 6.13: Test B (LW,DZ), $t=0.05$



(LW,KO) では、 $t=0.05$ のところで解が収束しなくなる。また、表から HLL でも DZ は綺麗に収束しているのに対し、KO の場合解を探す時その付近をよく振動していたため、最大収束回数が圧倒的に多くなっている。iteration としては最大でも 10 回前後で収束しなければ出力される値に信頼性がない。これらのことを踏まえ DZ の方がよく収束するのではないかという予測を立てた。

- Test C

今度は HLL の限界速度である速度 ($v_x=0.9999995$) を Shock-tube 問題の左側の初速の値として与えた。

図 6.14: Test C (HLL,KO), $t=0.1$

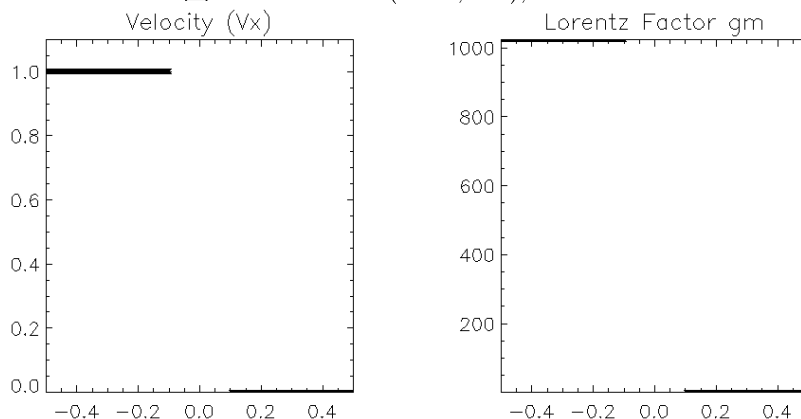
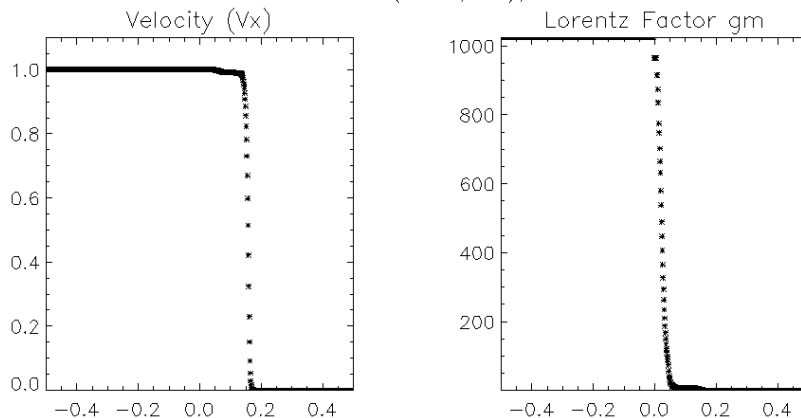


図 6.15: Test C (HLL,DZ), $t=0.1$



この結果からも DZの方がKOよりも収束していることが分かる。表からも 10 回以内に iteration は収束している。

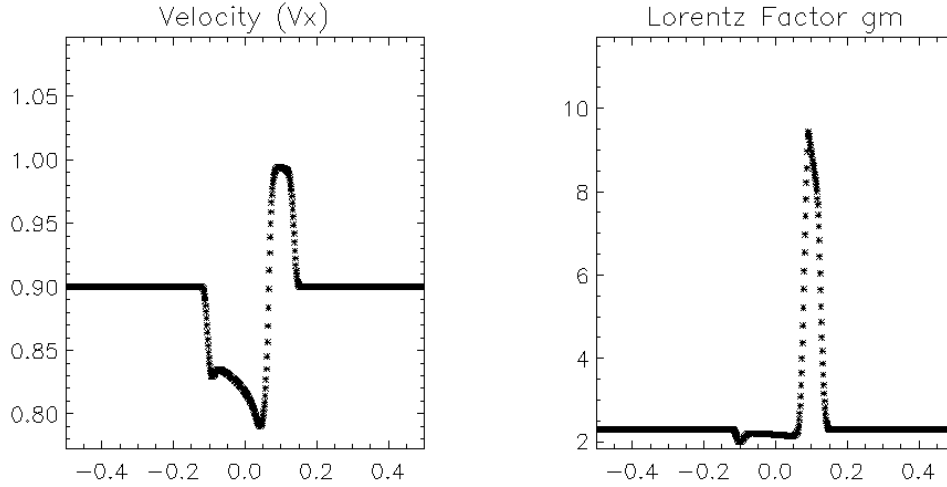
- Test D

この Test は定常状態においてどのくらいまで光速に近づけられるか示したものである。ここでもやはり DZの方が光速に近づけることが出来た。この時の γ factor は 2896.5 の値を示した。

- Test E

この Test では、強い磁場と iteration,scheme の関係を調べたものである。定常状態から Shock-tube 左側の初期値 B_y を強くしていき、(HLL,DZ) の収束する最大値を調べた。その後、他の scheme,iteration でも調べてみたものである。

図 6.16: Test E (HLL,DZ),t=0.1



定常状態にも関わらず、磁場が強くなると収束しない。また磁場を強くした場合でも、やはり (HLL,DZ) の収束が良いことがわかる。

6.8 考察

なぜ、DZの方が解が収束しやすいのか？

この問題は推測するに、DZはiterateする前に3次方程式により $W = \omega\gamma^2$ を決定するため解が見つけやすくなっていることが要因ではないかと考える。

また、このテスト計算から収束はschemeの精度によっても変わることが分かる。光速に限りなく近いシミュレーションをするためにはLax-Wendroffなどの数値振動が激しいschemeを使わず、Roe-typeのschemeなどの精度の高いschemeを使うことが必然となってくる。しかしながら、光速の30~40%程度の計算であればLax-Wendroff schemeや2-D Newton's methodでも十分解けることがわかる。さらに、2-D Newton's methodの方が3次方程式を使わない分計算コストが小さくなることが分かっている。しかし、1-D Newton's methodにおいても3次方程式の部分を変更すれば変わらない計算スピードを出せるのではないかと考える。

参考文献

- [1] Balsara, D. 2000, *ApJ*, 132, 83
- [2] Gammie, C. F., McKinney, J. C., & Tóth, G. 2002, *ApJ*, 589, 444
- [3] Koide, S., Shibata, K., & Kudoh, T. 1999, *ApJ*, 522, 727
- [4] Koide, S. 2003, *Physical Review*, 67, 104010
- [5] P. Janhunen. 1999, *J. comput. phys.*, 160, 649
- [6] Zanna, L. D., & Bucciantini, N. 2002, *A & A*, 390, 1177