

第 7 章

Vlasov 方程式の数値解法

東京大学 天野 孝伸

宇宙プラズマのマイクロダイナミクスの研究は従来より粒子法と呼ばれる数値計算法が好んで用いられてきた。これは超粒子と呼ばれる質量、電荷共に実際の粒子よりも大きな仮想的な粒子の運動を追う手法であり、少ない粒子数でもプラズマの運動を正しく記述する結果が得られたことから広く受け入れられてきた。一方で粒子法は、実際の粒子数よりもはるかに少ない粒子しか扱うことができないため数値ノイズに悩まされ、また分布関数の裾野や非熱的粒子の扱いは不得手であった。ここではこれらの問題点を解決する可能性を秘めた Vlasov 方程式の直接解法を紹介する。

7.1 イントロダクション

宇宙空間に存在するプラズマの大部分は非常に希薄で、クーロン衝突の平均自由行程が特徴的な空間スケールに対して非常に大きな「無衝突」プラズマと考えられる。この無衝突プラズマのダイナミクスを支配する方程式として良く知られた方程式が以下の Vlasov 方程式 (7.1) である。

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F}_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (7.1)$$

ここで $f_s = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は粒子種 s の分布関数、 $\mathbf{F}_s$ は粒子に働く力で、プラズマ中では電磁場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ から

$$\mathbf{F}_s = \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (7.2)$$

なる力がはたらく。ここで現れる電磁場は Maxwell 方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (7.3)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (7.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (7.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.6)$$

によって決定される。またここで

$$\rho = \sum_s \int f_s(x, v) dv \quad (7.7)$$

$$\mathbf{J} = \sum_s \int \mathbf{v} f_s(x, v) dv \quad (7.8)$$

によってプラズマから電磁場へフィードバックがかかる。従来はこの Vlasov 方程式を直接解くことはあきらめて、分布関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ を有限個の粒子の足し合わせによって表していたが¹ ここでは分布関数 f を 6 次元の関数とみなし、直接その時間発展を追いかける。しかし、現実的には現在のスーパーコンピュータを用いても 6 次元の計算によって物理的に意味のある結果を得ることは容易ではない² ので以下では空間 1 次元の問題を考える。

7.2 2 次元 Vlasov-Poisson System

背景磁場が 0 で静電近似の Vlasov 方程式を考える。速度空間は $v = v_x$ のみ考えれば十分で、この時の支配方程式は次の式で表される。

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{q_s}{m_s} E \frac{\partial f_s}{\partial v} = 0 \quad (7.9)$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (7.10)$$

ただし ϕ は静電ポテンシャルであり

$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7.11)$$

と表される。

7.2.1 The Splitting Scheme

目的は (7.9) と (7.10) を連立させて解くことだがここでは Cheng & Knorr(1976) によって提唱された Splitting Scheme を用いる。これは 2 次元の Vlasov 方程式 (7.9) を以下の 2 つの方程式に分離し、交互に解くものである。ただし、ここでは簡単のためイオンは背景に静止していると仮定し、電子の分布関数のみを対象として粒子種を表すインデックスを省略している (すなわち $f = f_e$)。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (7.13)$$

(7.12) は移流速度 v が時間、空間に依存しない単純な線形移流方程式である。代入してみればすぐ分かるようにこの方程式の解析解は

$$f(x, v, t + \Delta t) = f(x - v\Delta t, v, t) \quad (7.14)$$

と表される。一方 (7.13) も同様に線形の移流方程式であることが分かる。線形の移流方程式の解を求めるスキームはさかんに研究されているが、(7.12) と (7.13) をどのような順序で解けばよいかは自明ではない。

Cheng & Knorr(1976) はこの問題を以下のようにして解くことで 2 次精度となることを示した。す

¹ プラズマ物理で用いられる粒子法は Particle-In-Cell(PIC) と呼ばれ重力多体問題とは異なり、粒子間の相互作用は無視する。電磁場の値はグリッド上でのみ定義され粒子位置とグリッド位置で互いに物理量を補間し合う手法である

² 最近では 5 次元、6 次元の計算も行なわれるようになってきてはいるが長時間発展を追うことはできず、テスト問題や線形解析の延長程度に留まっている

なわち

$$f^*(x, v) = f^n(x - v\Delta t/2, v) \quad (7.15)$$

$$f^{**}(x, v) = f^*(x, v + \frac{e}{m}E^*(x)\Delta t) \quad (7.16)$$

$$f^{n+1}(x, v) = f^{**}(x - v\Delta t/2, v) \quad (7.17)$$

の3ステップを順に解く。ただし、(7.16)における $E(x)^*$ は $f^*(x, v)$ を用いて Poisson 方程式を解いて得られたものである。この Splitting Scheme の3次元以上、またはより高次精度への一般化は §7.3.1で紹介する Symplectic Integrator という概念によって与えられる。

7.2.2 CIP 法

CIP 法の解説は日本語の教科書 (矢部、内海、尾形) やサマースクールのテキストにも記述があるが、復習も兼ねて簡単に述べる。CIP 法の応用範囲は極めて広いが、基本は次の線形移流方程式 (7.18) の高精度解法の一つである。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (c > 0) \quad (7.18)$$

ここで格子間 $(i, i+1)$ を3次関数

$$f(x) = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad (7.19)$$

(ただし $X = x - x_i$)

を用いて補間する。ここで係数 a, b, c, d を決定するには4つの条件式が必要となるが、CIP 法では f_i, f_{i+1} の他に格子点 $i, i+1$ における微分値 (これを g_i, g_{i+1} とする) を用いる。すなわち

$$f_i = d \quad (7.20)$$

$$f_{i+1} = a\Delta x^3 + b\Delta x^2 + c\Delta x + d \quad (7.21)$$

$$g_i = c \quad (7.22)$$

$$g_{i+1} = 3a\Delta x^2 + 2b\Delta x + c \quad (7.23)$$

なる条件を用いて a, b, c, d を決定する。

$$a = \frac{g_i + g_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{2(f_i - f_{i+1})}{\Delta x^3} \quad (7.24)$$

$$b = \frac{3(f_{i+1} - f_i)}{\Delta x^2} - \frac{2g_i + g_{i+1}}{\Delta x} \quad (7.25)$$

$$c = g_i \quad (7.26)$$

$$d = f_i \quad (7.27)$$

これを用いて Δt 後の f_{i+1}, g_{i+1} は

$$f_{i+1} = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d \quad (7.28)$$

$$g_{i+1} = 3a\xi^2 + 2b\xi + c \quad (7.29)$$

によって求められる。(ただし $\xi = c\Delta t$)

従って CIP 法では必要な物理量だけでなくその微分値も同時に解き進める必要がある。これは記憶容量の面で不利になると思われがちだが、それでも多くの問題に適用され成功をおさめている。

7.2.3 CIP 法の Vlasov 方程式への適用

§7.2.1によって 2 次元の Vlasov-Poisson System の解は 1 次元の線形移流方程式を解くことに帰着した。Cheng & Knorr(1976) はこの解法に 3 次スプライン補間や Fourier 級数展開による補間を用いた。これらの方法はスプライン補間をするためには行列反転が必要となり、Fourier 級数による補間では Fourier 変換が必要となるってしまう。ところが、ここで用いる CIP 法はそれらの手間が省ける分高速な計算が可能である。またスプラインや Fourier 変換は並列計算に向けた手法とは言えないが、CIP 法は完全にローカルに補間関数を構築できるため並列計算にも有効であると考えられる。その CIP 法による Vlasov 方程式の解法は Nakamura & Yabe(1999) によって与えられ、より少ない格子点数でも高精度解が求まることを示された。ここではこの方法を用いることとする。前述の通り、CIP 法では物理量だけでなくその微分値も同時解き進める必要がある。今扱う 2 次元の Vlasov 方程式の場合分布関数 f の他に、 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial v}$ が必要となる。しかし、例えば (7.15) を解く際には CIP 法で求めることができるのは $(f, \partial f / \partial x)$ だけである。従って (7.15) によって

$$(f, \partial f / \partial x) \rightarrow (f^*, \partial f^* / \partial x) \quad (7.30)$$

が求まるように $\partial f^* / \partial v$ も何らかの方法によって求める必要がある³。Nakamura & Yabe(1999) は (7.15) を v で微分することによって求められる

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0 \quad (7.31)$$

を以下のように差分化した

$$\frac{\partial f_{i,j}^*}{\partial v} = \frac{\partial f_{i,j}}{\partial v} - \frac{\Delta t}{4\Delta v} \left[v_{j+1} \left(\frac{\partial f_{i,j+1}^*}{\partial x} + \frac{\partial f_{i,j+1}}{\partial x} \right) - v_{j-1} \left(\frac{\partial f_{i,j-1}^*}{\partial x} + \frac{\partial f_{i,j-1}}{\partial x} \right) \right] \quad (7.32)$$

ただし、 i, j はそれぞれ x, v の格子点を表すインデックスである。この式 (7.32) は右辺が $\partial f_{i,j}^* / \partial x$ と $\partial f_{i,j} / \partial x$ の平均を中央差分した形になっているため、形式的には半陰解法となっているが $\partial f^* / \partial x$ は CIP によって求まっているため陽的に計算することができる。(7.16) も同様に CIP 法によって求めた $\partial f^{**} / \partial v$ を用いて

$$\frac{\partial f_{i,j}^{**}}{\partial x} = \frac{\partial f_{i,j}^*}{\partial x} + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[\frac{e}{m} E_{i+1} \left(\frac{\partial f_{i+1,j}^{**}}{\partial v} + \frac{\partial f_{i+1,j}^*}{\partial v} \right) - \frac{e}{m} E_{i-1} \left(\frac{\partial f_{i-1,j}^{**}}{\partial v} + \frac{\partial f_{i-1,j}^*}{\partial v} \right) \right] \quad (7.33)$$

と書ける。Nakamura & Yabe(1999) はこのスキームによってグリッドの幅が一定の場合においては質量が保存することを示した。

7.2.4 解法のまとめ

ここで CIP 法による (7.30) と (7.32) によって Δt だけ時間を進める演算をそれぞれ次のように書くことにする。

$$(f^*, \partial f^* / \partial x) = \text{CIP}(f, \partial f / \partial x, v, \Delta t) \quad (7.34)$$

$$\partial f^* / \partial v = \text{FDM}(\partial f / \partial v, \partial f / \partial x, \partial f^* / \partial x, v, \Delta t) \quad (7.35)$$

³さらに $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v}$ もメモリに保持して同時に解き進めることも可能であるが、より高次元への適用を考えた時には現実的ではない

(7.34) は CIP 法を用いて分割した次元方向に Δt だけ値 f とその方向の微分値を更新することを表す。また (7.35) は (7.32) や (7.33) の差分 (Finite Difference Method) によって分割方向以外の次元の微係数を更新することを表す。

この記法を用いて 2 次元の Vlasov-Poisson System の解法をまとめると

1. Step1

$$(f^*, \partial f^* / \partial x) = \text{CIP}(f^n, \partial f^n / \partial x, v, \frac{\Delta t}{2}) \quad (7.36)$$

$$\partial f^* / \partial v = \text{FDM}(\partial f / \partial v, \partial f^n / \partial x, \partial f^* / \partial x, v, \frac{\Delta t}{2}) \quad (7.37)$$

2. Step2

$$(f^{**}, \partial f^{**} / \partial v) = \text{CIP}(f^*, \partial f^* / \partial v, E^*, \Delta t) \quad (7.38)$$

$$\partial f^{**} / \partial x = \text{FDM}(\partial f^* / \partial x, \partial f^* v / \partial, \partial f^{**} / \partial v, E^*, \Delta t) \quad (7.39)$$

3. Step3

$$(f^{n+1}, \partial f^{n+1} / \partial x) = \text{CIP}(f^{**}, \partial f^{**} / \partial x, v, \frac{\Delta t}{2}) \quad (7.40)$$

$$\partial f^{n+1} / \partial v = \text{FDM}(\partial f^{**} / \partial v, \partial f^{**} / \partial x, \partial f^{n+1} / \partial x, v, \frac{\Delta t}{2}) \quad (7.41)$$

と表される。ただし、Step1 と Step2 の間で Poisson 方程式を解き E_x^* を求める。

7.2.5 線形ランダウ減衰

ここでは線形ランダウ減衰のテスト問題を示す。この問題は多くの著者によってコードのテストとして用いられる標準問題である (e.g. Cheng & Knorr (1976), Nakamura & Yabe (1999), Filbet, Sonnendrücker, & Bertrand (2001))。分布関数の初期値は

$$f_0(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) (1 + A \cos kx) \quad (7.42)$$

で表される。ここでは $A = 0.01, k = 0.5$ で、系の大きさを $L = 4\pi$ とし、速度空間を $-4.0 < v < 4.0$ と取った時の計算結果を示す (図 7.1)。ただし、ここでは $n_e = 1, |q_e| = m_e = 1/4\pi$ すなわち $\omega_{pe} = 1$ 。また $v_{th} = \lambda_D = 1$ に規格化している。計算結果と線形解析による減衰率 $\gamma = 0.1533$ が非常に良く一致していることが分かる。

また、同様に線形解析からこの場合の振動数は $\omega = 1.4156$ と求まっているが、これから波と共鳴する粒子は $v_{resonance} = \omega/k \simeq 2.83$ の速度を持った粒子であることが分かる。つまりこの問題は分布関数の裾野の粒子と場がエネルギー交換を行なうため従来の粒子法では解きにくい問題であるが、Vlasov 方程式を直接解くことで非常に精度良く解けていることが分かる。また Nakamura & Yabe (1999) によって格子点数を半分に減らしても誤差が小さい範囲で収まることが示されている。

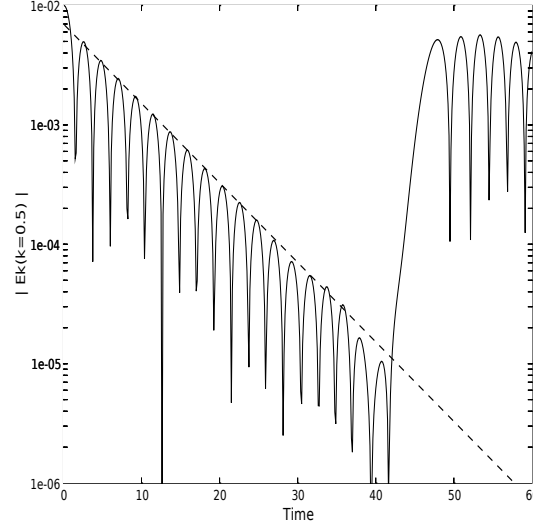


図 7.1: 線形ランダウ減衰 線形ランダウ減衰のテスト ($N_x = N_v = 32, A = 0.01, k = 0.5$)。実線が計算により求められた電場の振幅、破線が線形解析により求められた減衰率 $\gamma = 0.1533$ を表す。

7.3 3次元 Vlasov-Maxwell System

§7.2によって示された解法を磁場を含めた Vlasov-Maxwell System へと拡張する。ここでは実空間を §7.2と同じく x とし、背景磁場の方向を z 方向にとる。背景磁場が x, y 成分を含まない時、粒子のジャイロ運動は (v_x, v_y) 空間の中に閉じるので v_z 方向は独立となり解く必要がなくなる。この時解くべき方程式は

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{q_s}{m_s} \left(E_x + \frac{v_y}{c} B_z \right) \frac{\partial f_s}{\partial v_x} + \frac{q_s}{m_s} \left(E_y - \frac{v_x}{c} B_z \right) \frac{\partial f_s}{\partial v_y} = 0 \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -c \frac{\partial B_z}{\partial x} - 4\pi J_y \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -c \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (7.45)$$

と Poisson 方程式 (7.10) である。ここで述べる方法は 3 次元の速度関数にも直ちに拡張可能な方法である。

7.3.1 Symplectic Integrator

§7.2.1で導入した Splitting Scheme をより高次元へと拡張するためにここで Symplectic Integrator⁴ と呼ばれる概念を導入する。簡単のため再び 2 次元の Vlasov-Poisson System へ戻る。粒子の Hamiltonian が次のように表されるとき

$$H = \frac{v^2}{2} + \phi(x) \quad (7.46)$$

⁴Symplectic Integrator の概念について分かり易い日本語の説明が Web [3] にある。また Vlasov 方程式への適用は Mangeney et al.(2002) を参照

Vlasov 方程式はこれを用いて

$$\frac{\partial f}{\partial t} = [H, f] \equiv \Lambda f \quad (7.47)$$

と書ける。ただしポアソン括弧

$$[H, f] \equiv \{(\partial H / \partial x)(\partial f / \partial v) - (\partial H / \partial v)(\partial f / \partial x)\}$$

を用い、この演算を形式的に Λ と定義した。この演算子 Λ を用いて、この方程式の形式的な解は

$$f(x, v, t + \tau) = \exp(\Lambda \tau) f(x, v, t) \quad (7.48)$$

と書かれる。つまり $\exp(\Lambda \tau)$ を評価することは2次元の移流方程式を解くことに値する。しかしこれをそのまま解くのは難しいので何らかの方法で近似的に評価することを考える。今、Hamiltonian H は次のように二つの部分に分離可能である。

$$H = H_1(v) + H_2(x) \quad (H_1(v) = \frac{v^2}{2}, H_2(x) = \phi(x)) \quad (7.49)$$

ここで H_1, H_2 に対応する演算子をそれぞれ Λ_1, Λ_2 と定義する

$$\Lambda_i = [H_i, f] \quad (i = 1, 2) \quad (7.50)$$

これは §7.2.1 で次元ごとに分割したことに対応し、

$$\exp(\Lambda_1 \tau) f(x, v) = f(x - v\tau, v) \quad (7.51)$$

$$\exp(\Lambda_2 \tau) f(x, v) = f(x, v + \frac{e}{m} E(x) \tau) \quad (7.52)$$

であることが分かる。これらはそれぞれ線形の移流方程式を解くスキームによって解を求めることにし、この $\exp(\Lambda_1 \tau), \exp(\Lambda_2 \tau)$ の組を用いて $\exp(\Lambda \tau) = \exp((\Lambda_1 + \Lambda_2) \tau)$ を評価する。単純にこの2つの演算子を順番に作用させたとき

$$\exp(\Lambda \tau) = \exp(\Lambda_1 \tau) \exp(\Lambda_2 \tau) + O(\tau^2) \quad (7.53)$$

であることが分かり、これは $\exp(\Lambda \tau)$ を1次精度で近似している。これは粒子の運動方程式を解く際の leap-frog スキームに対応する。

より高次の近似を求めるために $\tau \ll 1$ の時 Taylor 展開

$$\exp(\Lambda \tau) = 1 + \Lambda \tau + \frac{(\Lambda \tau)^2}{2} + O(\tau^3) \quad (7.54)$$

を用いると

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{\Lambda_1 \tau}{2}\right) \exp(\Lambda_2 \tau) \exp\left(\frac{\Lambda_1 \tau}{2}\right) \\ & \simeq 1 + \Lambda_1 \tau + \Lambda_2 \tau + \frac{(\Lambda_1 \tau)^2 + (\Lambda_2 \tau)^2 + \Lambda_1 \Lambda_2 \tau + \Lambda_2 \Lambda_1 \tau}{2} + O(\tau^3) \\ & = 1 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) \tau + \frac{((\Lambda_1 + \Lambda_2) \tau)^2}{2} + O(\tau^3) \end{aligned}$$

となる。つまり §7.2.1 は $\exp(\Lambda\tau)$ の評価に

$$\exp(\Lambda\tau) = \exp\left(\frac{\Lambda_1\tau}{2}\right) \exp(\Lambda_2\tau) \exp\left(\frac{\Lambda_1\tau}{2}\right) + O(\tau^3) \quad (7.55)$$

なる 2 次精度の近似を用いたことに相当する。

このように分割した微分作用素を組み合わせることで高次精度のスキームを構築する方法を Symplectic Integrator と呼ぶ。数学的には指数関数の有限積は一つの指数関数に必ずまとめられることが知られている。すなわち

$$\prod_{i=1}^k \exp(u_i \Lambda_1 \tau) \exp(v_i \Lambda_2 \tau) = \exp(\Lambda' \tau) \quad (7.56)$$

これにより Symplectic Integrator によって積分することは Λ の代わりに Λ' によって正準変換したことに相当し、 Λ と Λ' の誤差の範囲でエネルギーが保存する。また (7.55) では 2 次精度を用いているが、この演算子の組合せにより任意精度が可能であることが知られている。例として次に 4 次の近似式を与えておく。

$$\exp(\Lambda\tau) = S_2(\alpha\tau, \Lambda_1, \Lambda_2) S_2((1-2\alpha)\tau, \Lambda_1, \Lambda_2) S_2(\alpha\tau, \Lambda_1, \Lambda_2) + O(\tau^5) \quad (7.57)$$

ただし

$$\alpha = \frac{1}{2 - \sqrt[3]{2}} \quad (7.58)$$

$$S_2(\tau, \Lambda_1, \Lambda_2) = \exp\left(\frac{\Lambda_1\tau}{2}\right) \exp(\Lambda_2\tau) \exp\left(\frac{\Lambda_1\tau}{2}\right) \quad (7.59)$$

7.3.2 3 次元 Vlasov 方程式の解法

§7.3.1 の Symplectic Integrator を 3 次元の Vlasov 方程式に適用するために

$$\Lambda_1 \equiv v_x \frac{\partial}{\partial x} \quad (7.60)$$

$$\Lambda_2 \equiv \frac{q}{m} \left(E + \frac{v_y}{c} B_z \right) \frac{\partial}{\partial v_x} \quad (7.61)$$

$$\Lambda_3 \equiv \frac{q}{m} \left(E - \frac{v_x}{c} B_z \right) \frac{\partial}{\partial v_y} \quad (7.62)$$

と演算子 $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ を定義するとこれらの作用素を組み合わせると ((7.55) を用いると)

$$\begin{aligned} \exp(\Lambda\tau) &\equiv \exp((\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)\tau) \\ &= \exp\left(\frac{\Lambda_1\tau}{2}\right) \exp((\Lambda_2 + \Lambda_3)\tau) \exp\left(\frac{\Lambda_1\tau}{2}\right) + O(\tau^3) \\ &= \exp\left(\frac{\Lambda_1\tau}{2}\right) \left[\exp\left(\frac{\Lambda_2\tau}{2}\right) \exp(\Lambda_3\tau) \exp\left(\frac{\Lambda_2\tau}{2}\right) \right] \exp\left(\frac{\Lambda_1\tau}{2}\right) + O(\tau^3) \end{aligned}$$

のように 5 ステップで 2 次精度となることが分かる。

それぞれの移流方程式は CIP 法によって解き、§7.2.4 と同様に CIP 法によって更新できない微分値は差分によって求めればよい。

7.3.3 Maxwell 方程式の解法

ここでは Vlasov 方程式と連立させて解く Maxwell 方程式 (7.44), (7.45) の解法を述べる。

電磁波の伝播

まず電流 $J_y = 0$ の場合（真空状態）での電磁波の伝播⁵ を考える。(7.44) + (7.45), (7.44) - (7.45) よりそれぞれ次の式を得る。

$$\frac{\partial(E_y + B_z)}{\partial t} + c \frac{\partial(E_y + B_z)}{\partial x} = 0 \quad (7.63)$$

$$\frac{\partial(E_y - B_z)}{\partial t} - c \frac{\partial(E_y - B_z)}{\partial x} = 0 \quad (7.64)$$

これはそれぞれ速度 $c, -c$ の線形移流方程式の形をしているため CIP 法などのスキームを用いて解くことができる。注目すべきはこの変形によって電磁波を右に進む波と左に進む波に分離したことであり、これによって自由境界が自然に実現することである。例えば $x = 0$ の境界において $E_y(+x) = E_y(-x), B_z(+x) = B_z(-x)$ (計算では $E_{y0} = E_{y1}, B_{z0} = B_{z1}$ とすれば良い) とするだけで簡単に自由境界が実現する。図 7.2 の左端はこの境界条件となっているが、非物理的な波の反射は見られない。また右端は $E_{yN} = -E_{yN+1}, B_{zN} = B_{zN+1}$ としてある。これによって E_y は固定端、 B_z は自由端として反射している。

電流項

CIP 法では方程式を移流相と非移流相に分離して解くが、ここでもその方法を用いることにする。つまり、(7.44) を

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -4\pi J_y \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -c \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (7.66)$$

と分離し、(7.65) は

$$E_y^{n+\frac{1}{2}} = E_y^{n-\frac{1}{2}} - 4\pi J_y^n \Delta t \quad (7.67)$$

によって解けば良い。ただし、CIP 法を用いる際には微分値 $\partial E_y / \partial x$ も必要なため、

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right)^{n-\frac{1}{2}} - 4\pi \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} \right)^n \Delta t \quad (7.68)$$

によって $\partial E_y / \partial x$ も更新する必要がある。

ここで電場の定義時間を半整数ステップとしたのは時間差分を中央差分とするためである。

7.3.4 解法のまとめ

以上の解法をまとめると次のようになる（図 7.3 参照）。記号 CIP, FDM の意味は §7.2.4 と同じである。また

$$F_x = \frac{q}{m} \left(E_x + \frac{v_y}{c} B_z \right) \quad (7.69)$$

⁵ より詳しい解説は CIP 法の教科書（矢部、内海、尾形）参照

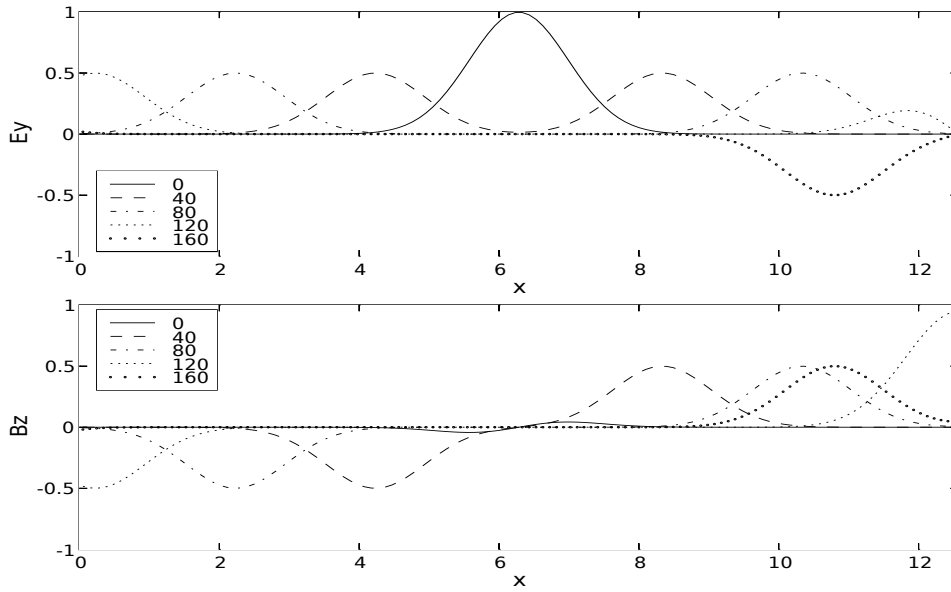


図 7.2: 電磁波の伝播 ($N = 128, L = 4\pi, c = 1.0$)。左は自由境界、右は $E_y = 0$ の固定端 B_z が自由端。それぞれ 0, 40, 80, 120, 160 ステップの解の様子を示している。移流方程式の解法には CIP 法を用いた。

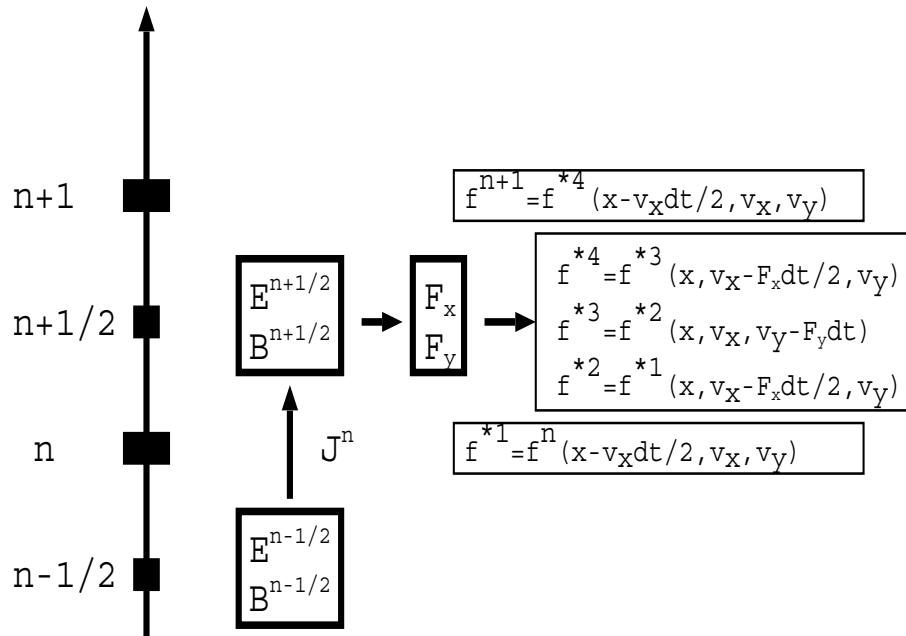


図 7.3: 3 次元の Vlasov-Maxwell System の時間ステップ更新方法

$$F_y = \frac{q}{m} \left(E_y - \frac{v_x}{c} B_z \right) \quad (7.70)$$

とする。

Step1

$$(f^{*1}, \partial f^{*1} / \partial x) = \text{CIP}(f^n, \partial f^n / \partial x, v_x, \Delta t / 2) \quad (7.71)$$

$$\partial f^{*1} / \partial v_x = \text{FDM}(\partial f^n / \partial v_x, \partial f^n / \partial x, \partial f^{*1} / \partial x, v_x, \Delta t / 2) \quad (7.72)$$

$$\partial f^{*1} / \partial v_y = \text{FDM}(\partial f^n / \partial v_y, \partial f^n / \partial x, \partial f^{*1} / \partial x, v_x, \Delta t / 2) \quad (7.73)$$

Step2

$$(f^{*2}, \partial f^{*2} / \partial v_x) = \text{CIP}(f^{*1}, \partial f^{*1} / \partial v_x, F_x, \Delta t / 2) \quad (7.74)$$

$$\partial f^{*2} / \partial x = \text{FDM}(\partial f^{*1} / \partial x, \partial f^{*1} / \partial v_x, \partial f^{*2} / \partial v_x, F_x, \Delta t / 2) \quad (7.75)$$

$$\partial f^{*2} / \partial v_y = \text{FDM}(\partial f^{*1} / \partial v_y, \partial f^{*1} / \partial v_x, \partial f^{*2} / \partial v_x, F_x, \Delta t / 2) \quad (7.76)$$

Step3

$$(f^{*3}, \partial f^{*3} / \partial v_y) = \text{CIP}(f^{*2}, \partial f^{*2} / \partial v_y, F_y, \Delta t) \quad (7.77)$$

$$\partial f^{*3} / \partial x = \text{FDM}(\partial f^{*2} / \partial x, \partial f^{*2} / \partial v_y, \partial f^{*3} / \partial v_y, F_y, \Delta t) \quad (7.78)$$

$$\partial f^{*3} / \partial v_x = \text{FDM}(\partial f^{*2} / \partial v_x, \partial f^{*2} / \partial v_y, \partial f^{*3} / \partial v_y, F_y, \Delta t) \quad (7.79)$$

Step4

$$(f^{*4}, \partial f^{*4} / \partial v_x) = \text{CIP}(f^{*3}, \partial f^{*3} / \partial v_x, F_x, \Delta t / 2) \quad (7.80)$$

$$\partial f^{*4} / \partial x = \text{FDM}(\partial f^{*3} / \partial x, \partial f^{*3} / \partial v_x, \partial f^{*4} / \partial v_x, F_x, \Delta t / 2) \quad (7.81)$$

$$\partial f^{*4} / \partial v_y = \text{FDM}(\partial f^{*3} / \partial v_y, \partial f^{*3} / \partial v_x, \partial f^{*4} / \partial v_x, F_x, \Delta t / 2) \quad (7.82)$$

Step5

$$(f^{n+1}, \partial f^{n+1} / \partial x) = \text{CIP}(f^{*4}, \partial f^{*4} / \partial x, v_x, \Delta t / 2) \quad (7.83)$$

$$\partial f^{n+1} / \partial v_x = \text{FDM}(\partial f^{*4} / \partial v_x, \partial f^{*4} / \partial x, \partial f^{n+1} / \partial x, v_x, \Delta t / 2) \quad (7.84)$$

$$\partial f^{n+1} / \partial v_y = \text{FDM}(\partial f^{*4} / \partial v_y, \partial f^{*4} / \partial x, \partial f^{n+1} / \partial x, v_x, \Delta t / 2) \quad (7.85)$$

ただし E_x は Step1 と Step2 の間で Poisson 方程式を解いて求め、 E_y, B_z は f^n の値から電流を計算し、これを用いて Maxwell 方程式を解いて求める。

また注意として、安定に解き進めるためには Maxwell 方程式を解く際に電流の寄与（非移流項）を計算する (7.67), (7.68) を電磁波の伝播（移流項）よりも先に計算すると良い⁶。

⁶ 著者の経験では移流項を先に計算すると電磁場のエネルギーが単調に増えてしまったため移流項を後に計算するようにしている

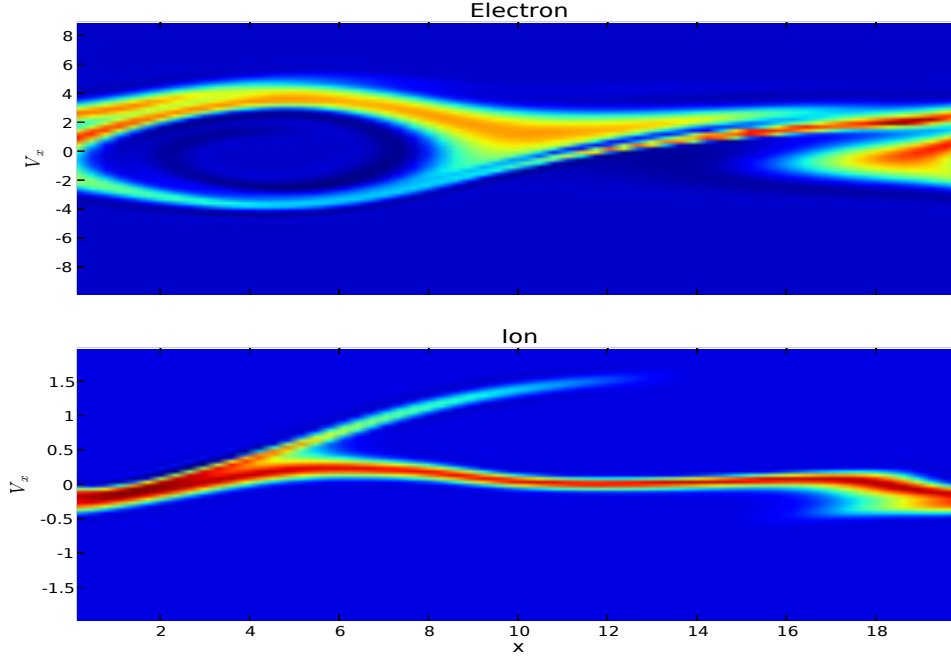


図 7.4: Buneman 不安定性の計算例 ($N_x = 64, N_{V_x} = N_{V_y} = 80, \omega_{pe}/\Omega_e = 10, m_i/m_e = 25$) $\omega_{pe}t = 35.0$ における電子 (上)、イオン (下) の位相空間図。横軸が x , 縦軸が v_x でカラーで位相空間密度を表している。

7.3.5 計算例: Buneman 不安定

電子とイオンが相対速度を持ち運動している (すなわち電流が流れている) 時にその相対速度が電子の熱速度よりも大きい場合 Buneman 不安定と呼ばれる不安定により静電的な波が発生し、その結果電子の位相空間に hole 構造 (electron hole) が形成されることが知られている。ここでは 3 次元の Vlasov 方程式に $\omega_{pe}/\Omega_e = 10$ 程度の弱い磁場を入れた場合の計算例を図 7.4 に示す。ただし初期状態ではイオンが静止、電子は $V_0/c = 0.4$ でドリフトし、それぞれ熱速度は $v_e/c = 0.05, v_i/c = 0.01$ ($T_e = T_i$) としている。

参考文献

- [1] Cheng, C.Z. & Knorr, G., 1976, *J. Comput. Phys.*, **22**, 330
- [2] Nakamura, T. & Yabe, T., 1999, *Comput. Phys. Comm.*, **120**, 122
- [3] <http://www-cms.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~naoki/CIPINTRO/SYMP/>
- [4] Filbet, F., Sonnendrücker, E. & Bertrand, P., 2001, *J. Comput. Phys.*, **172**, 166
- [5] Mangeney, A. et al., 2002, *J. Comput. Phys.*, **179**, 495
- [6] 矢部孝 内海隆行 尾形陽一, 2003, CIP 法 (森北出版)