

概要

我々の住んでいる地球のはるか上空では、温度差により大きな擾乱が生じている。この温度差により起こる不安定性をロスビー波不安定性 (Rossby Wave Instability) といい、この不安定性を解消するために生じる波のことをロスビー波 (Rossby Wave) という。

この現象は実験室の簡単な実験で再現することが出来る。それは回転槽実験と呼ばれるものである。これは液体の入ったトーラス状の円柱を中心は温度を高くし、外側は低くして温度差を生じさせることにより、不安定性を生じさせるものである。

そこで、この回転槽実験を計算機による2次元シミュレーションで再現することを目的とした。

目次

1. Rossby Wave Instability とは
 - 1-1 回転槽実験について
 - 1-2 現象の変化
 - 1-3 状態の変化の理由
 - 1-4 宇宙空間への発展
 - 1-5 実際の例
2. 初期条件と方程式について
 - 2-1 方程式について
 - 2-2 計算方法と境界条件について
 - 2-3 初期条件について (HSJ とは)
3. 加えた摂動と計算したモデル
 - 3-1 加えた摂動について
 - 3-2 v_r, v_ϕ に加えた摂動について
 - 3-3 計算したモデル
 - 3-3-0 摂動を加えない場合
 - 3-3-1 v_r だけに摂動を加える場合
 - 3-3-2 v_ϕ だけに摂動を加える場合
4. シミュレーション結果と考察
 - 4-0 摂動を加えない場合
 - 4-1 v_r にだけ摂動を加えた場合
 - 4-2 v_ϕ と v_r に摂動を加えた場合

4-3 それぞれの結果と考察

1. Rossby Wave Instability とは

1-1 回転槽実験について

回転槽実験とは、下図のように水槽を外側を内側よりも温度が高い状態にして、それを回し、絵の具などで色をつけた水を流し込みその挙動を見る実験である。

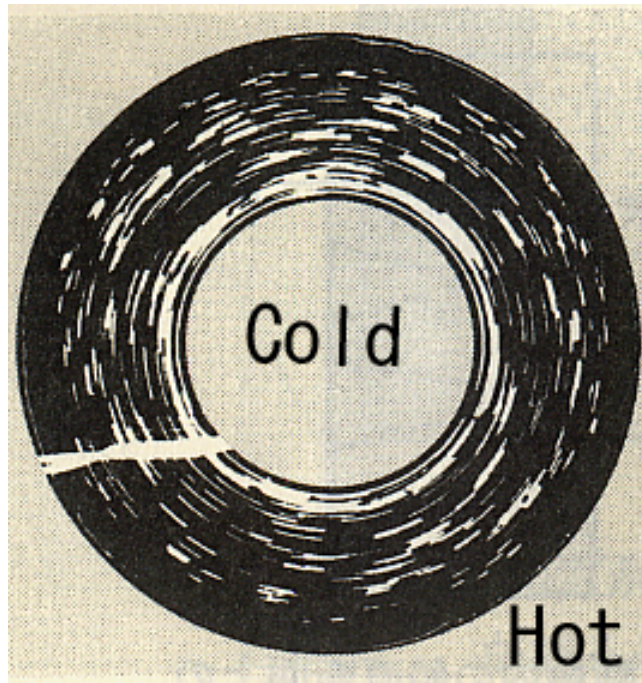


図 1: 回転槽実験

1.2 状態の変化

水槽を回転させていると、角速度が早くなるにつれて図1の状態から図2の状態へと変化して行く。

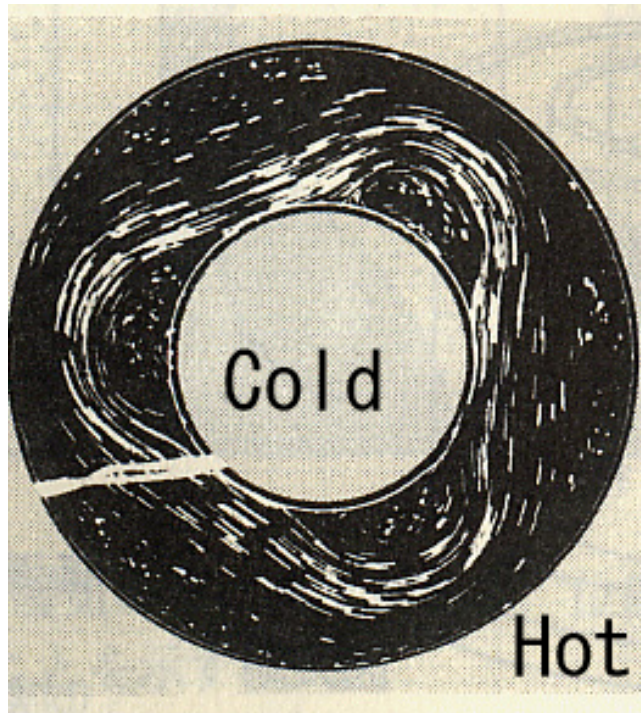


図 2: 回転槽実験

1.3 状態の変化の理由

水槽を回転させると、流体には動径方向に遠心力が生じる。そうすると、水槽の外側が内側よりも温度が高いために、対流が生じる。

初期に与えられた角速度が遅い場合は対流のセルが存在するだけだが、与えられた角速度が早いと時間が経つにつれて角速度のグラジエントが大きくなり、その結果セルが不安定になる。

そうすると、セルは形をくずし図2のような波を作る。この波のことをロスビー波 (Rossby Wave) といい、この不安定性のことをロスビー波不安定性 (Rossby Wave Instability) と言う。

1.4 宇宙空間への発展

実際にこれを宇宙空間における状態としてシミュレーションを行なうためには、2次元極座標を使い、流体を囲んでいる容器のかわりに、図3のように重力で束縛され、そして、ケプラー回転している流体をを考える。

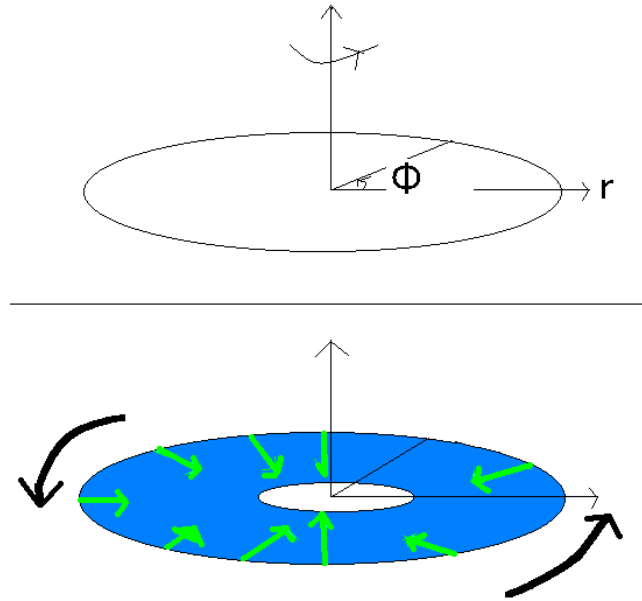


図 3: 宇宙空間への応用

1.5 実際の例

実際の例としては、図2の Cold 側を極地方、Hot 側を赤道付近と見なすと、間に存在している波をジェット気流として考えることができる。

2. 初期条件と基礎方程式について

2.1 基礎方程式について

基礎方程式は次のものを使った。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(r, u)}{\partial r} + \frac{\partial g(r, u)}{\partial \phi} + S(r, u) = 0 \quad (1)$$

ここで、 u, f, g, S は次の通りである。

$$u = \begin{pmatrix} r\rho \\ r\rho v_r \\ r^2\rho v_{phi} \\ rE \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} r\rho v_r \\ r\rho v_r^2 \\ r^2\rho v_r v_\phi \\ (rE + rP)v_r \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} r\rho v_\phi \\ \rho v_r v_\phi \\ r\rho v_\phi^2 + rP \\ (E + P)v_\phi \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dP}{dr} - \rho(v_\phi^2 - \frac{GM}{r}) \\ 0 \\ \rho \frac{v_r}{r} \end{pmatrix} \quad (2)$$

2-2 計算方法と境界条件について

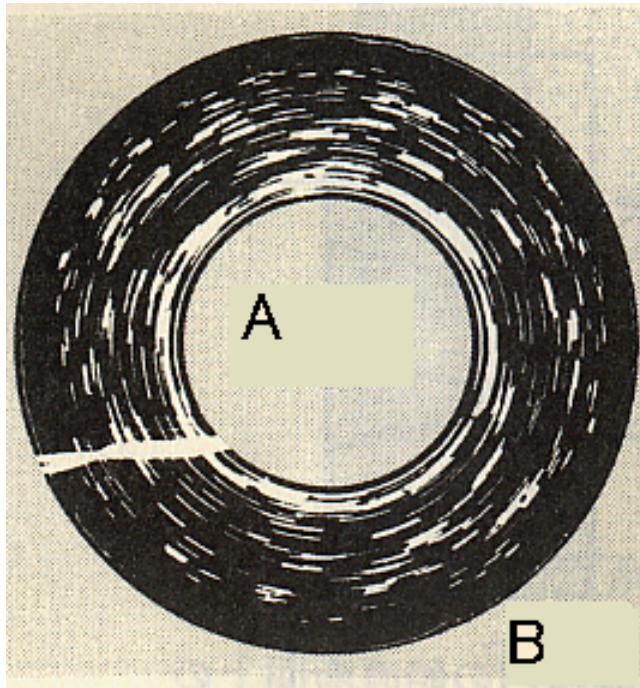


図 4: 境界条件 図 1

上記の方程式を Modified Lax-Wendroff 法と 2次元軸対称性を使い、CANS(宇宙磁気流体シミュレーションの統合ソフトウェア)で解き、シミュレーションを行なった。グリッド数は 107×107 である。

境界は2つ存在し、境界条件は上図の A の範囲では吸収境界を使い、B の範囲では固定境界とした。マージンは4とした。

2-2 初期条件について

初期条件としては、HSJ(Homentropic Step Jump)を使った。これはエントロピー一定の Jump を考えるものである。この状態の密度は $\delta r = 0.05$ の範囲で $A = 0.65$ の Jump があるとし、また、 $\Gamma = \frac{5}{3}$ 、 $\rho = 1$ とする。この条件に対する式は次で与えられる。

$$\text{密度 } \rho = \rho_0 \left(1 + \frac{A}{2} \tanh\left(\frac{r-r_0}{\delta r}\right) \right) + 1 \quad \text{圧力 } P = P_0 \frac{\rho(r)}{\rho_0} \quad (3)$$

角速度 Ω については、平衡ディスクで圧力勾配、重力が遠心力と釣りあっていると決めて決定する。その釣合の式は

$$r\Omega^2 = \frac{1}{\Sigma} \frac{dP}{dr} + \frac{d\Phi}{dr} \quad (4)$$

である。

また先程の方程式とこの式に規格化するために、 $GM = 1$ 、 $\rho = 1$ 、 $v_{\phi 0} = 1$ 、 $P_0 = \frac{5}{3} \times 0.1$ を与える。

初期状態の2次元の圧力の図と、密度、圧力そして角速度のグラフを下に示す。

これを初期状態として、計算していく。

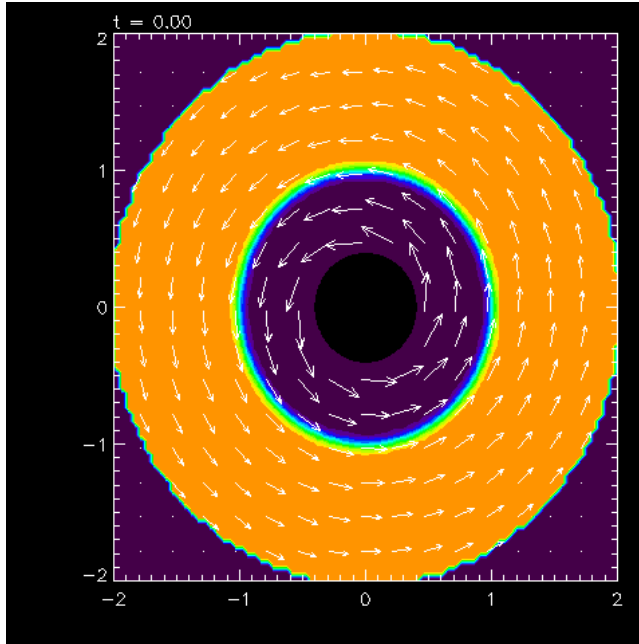


図 5: 初期状態の圧力の2次元図

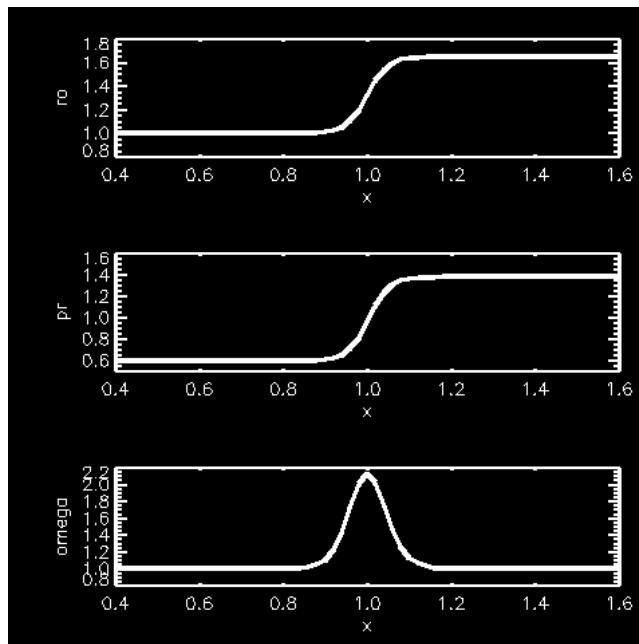


図 6: 初期状態の圧力、密度、角速度のグラフ

3. 加えた摂動と計算したモデル

3-1 加えた摂動

加えた摂動は、 $\Psi = \frac{\delta P}{\Sigma}$ とした時

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + B(r) \frac{\partial \Psi}{\partial r} + C(r) \Psi = 0^{*1} \quad (5)$$

を解いたものであり、ここで B,C は以下の通りである。

$$c_1 = k_\phi^2 + \frac{\kappa^2 - \Delta\omega^2}{c_s^2} + 2k_\phi \frac{\Omega}{\Delta\omega} \frac{F'}{F} \quad (6)$$

$$c_2 = \frac{1 - L'_s}{L_s^2} + \frac{B(r) + 4k_\phi \Omega / \Delta\omega}{L_s} + \frac{k_\phi^2 c_s^2 / \Delta\omega^2 - 1}{L_s L_p} \quad (7)$$

としたとき、

$$B(r) = \frac{1}{r} + \frac{F'}{F} - \frac{\Omega'}{\Omega} \quad (8)$$

$$C(r) = -c_1 - c_2 \quad (9)$$

となる。また、

$$k_\phi = \frac{m}{r} \quad (10)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{r^3} \frac{d(r^4 \Omega^2)}{dr} \quad (11)$$

$$\Delta\omega(r) = \omega - m\Omega(r) \quad (12)$$

$$F = \Sigma \Omega / [\kappa^2 - \Delta\omega^2 - c_s^2 / (L_s L_p)] \quad (13)$$

$$L_s = \Gamma / \left[\frac{d}{dr} \ln \left(\frac{P}{\Sigma \Gamma} \right) \right] \quad (14)$$

$$L_p = \Gamma / \left[\frac{d}{dr} \ln(P) \right] \quad (15)$$

である。

3-2 v_r, v_ϕ に加えた摂動について

3-1 の方程式から得られた摂動のグラフは、 v_r, v_ϕ 共に以下の通りである。

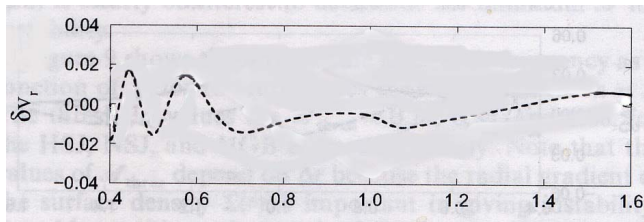


図 7: v_r に加えた摂動

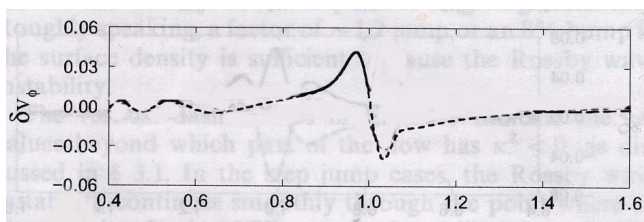


図 8: v_ϕ に加えた摂動

3-3 計算したモデルについて

3-3-0. 摂動を加えない場合

これは摂動を加えない場合である。時間発展させても崩れない安定状態が予測される。

3-3-1. v_r だけに摂動を加える

初期条件で v_r に r にのみ依存する摂動を加える。

3-3-2. v_ϕ だけに摂動を加える

v_ϕ には r, ϕ に依存する摂動を加え、 v_r には r にのみ依存する摂動を加える。グラフに描かれている摂動は r にしか依存していないが、実際に加えた摂動は $v_\phi \propto \sin(m\phi)$ とし、 m はモードの数とした。

以下のシミュレーションでは全て $m=5$ である。

4. シミュレーション結果と考察

4-0. 摂動を加えない場合

摂動を加えない場合の結果は図9の通りである。これは時間を発展させても崩れていないことから、安定状態であると言える。この図は左上から右そして左へと、それぞれ $t=0, t=4, t=7, t=10$ の時である。

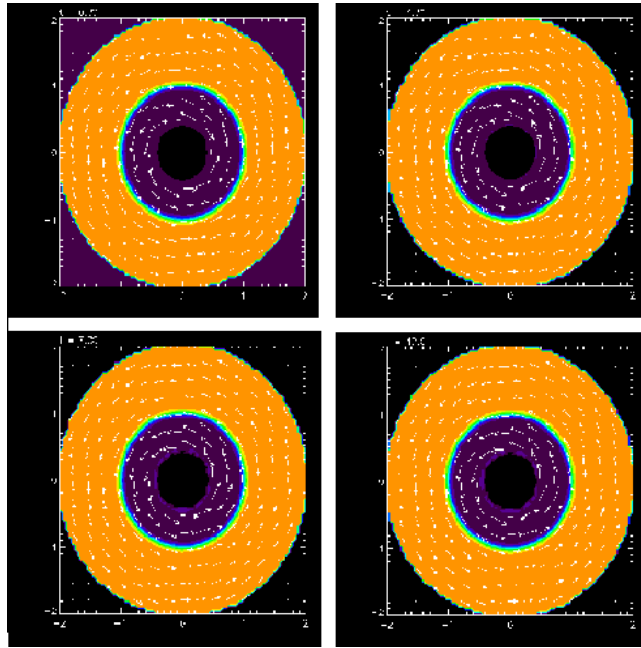


図 9: 摂動を加えない時

4-1. v_r のみに摂動を加える

v_r のみに摂動を加えると図10のように摂動が成長している様子が分かる。これに対応する2次元の図が図11であり、時間が経つにつれて $r=1.2$ 辺りに段々収束している様子が分かる。これも左上から右にそして左下と、それぞれ $t=0, t=4, t=7, t=10$ である。

4-2.4-1 に加え v_ϕ にも摂動を加える。

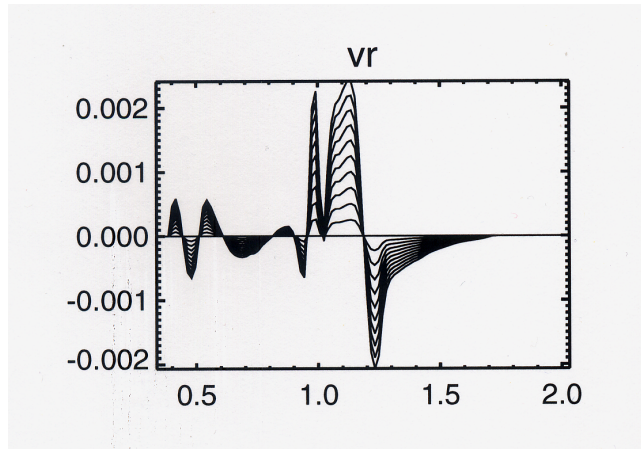


図 10: v_r に加えた摂動の成長 1次元

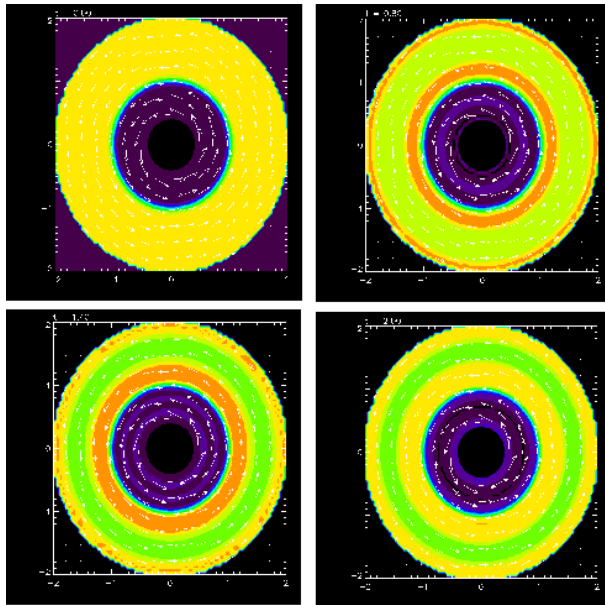


図 11: v_r に加えた摂動の成長 2次元

次に v_r と v_ϕ の両方に対して摂動を加えた。その図が図 12 である。これも先程と同様に並んでいるが時間のスケールが異なり、右から $t=0, t=0.8, t=1.4, t=1.6, t=1.8, t=2.0$ である。

これはモードを 5 としたために、5 つの尾を持つ渦を観ることができる。

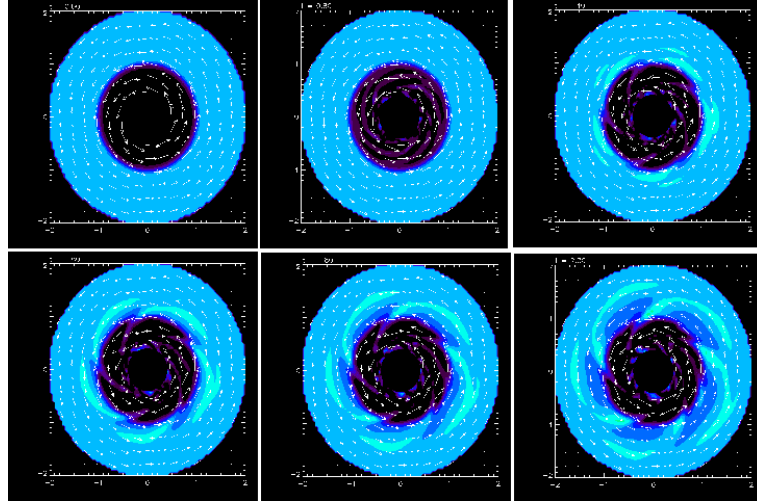


図 12: v_r, v_ϕ に加えた摂動の成長 2次元

4-3 結果と考察について

これらのシミュレーションから、摂動を加えていないときは円盤は安定状態を保つことが出来るが、 v_r に r 方向の摂動を加えるとリング状に分裂し集まって来た。

その後 v_ϕ と v_r の両方に摂動を加えると、中心の波の反射波が増長した。これは波を吸収するような境界条件が必要であることを示している。

また、これを地球スケールに直せば、ジェット気流への適用が可能である。

*1 について

この方程式はこのディスクにおける3つの式

$$\frac{D\Sigma'}{Dt} + \Sigma' \nabla \cdot v = 0 \quad (16)$$

$$\frac{Dv'}{Dt} = \frac{-1}{\Sigma'} \nabla P' - \nabla \Phi \quad (17)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{P'}{\Sigma'(\Gamma)} \right) = 0 \quad (18)$$

ただし

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \quad (19)$$

に

$$\Sigma' = \Sigma + \delta\Sigma v' = v + \delta v P' = P + \delta P \quad (20)$$

とし、この摂動項を *perturbations* $\propto \exp(im\phi - i\omega t)$ として上記の3つの式に代入する。そうすると、第1式から

$$i\Delta\omega\delta\Sigma = \nabla \cdot (\Sigma\delta v) \quad (21)$$

第2式から

$$i\Delta\omega\delta v_r + 2\Omega\delta v_\phi = \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial\delta P}{\partial r} - \frac{\delta\Sigma}{\Sigma^2} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (22)$$

$$i\Delta\omega\delta v_\phi - \frac{\kappa^2}{2\Omega}\delta v_r = ik_\phi \frac{\delta P}{\Sigma} \quad (23)$$

第3式から

$$\delta P = c_s^2\delta\Sigma - \frac{i\Sigma c_s^2}{\Delta\omega L_s}\delta v_r \quad (24)$$

を得ることが出来る。

r, ϕ 方向の速度の摂動の式を $\Phi = \frac{\delta P}{\Sigma}$ で書き換えると

$$\Sigma\delta v_r = iF \left[\frac{\Delta\omega}{\Omega} \left(\Phi' \frac{\Phi}{L_s} \right) - 2k_\phi \Phi \right] \quad (25)$$

$$\Sigma\delta v_\phi = F \left[-k_\phi \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega} + \frac{c_s^2}{\Delta\omega\Omega L_s L_p} \right) \Phi + \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} \left(\Phi' - \frac{\Phi}{L_s} \right) \right] \quad (26)$$

となる。

これを (16)(19) に代入すると、

$$\frac{1}{r} \left(\frac{rF}{\Omega} \Phi' \right) - \frac{k_\phi^2 F}{\Omega} \Phi = \frac{\Sigma \Phi}{c_s^2} + \frac{2k_\phi F'}{\Delta \omega} \Phi + \left[\frac{F}{\Omega L_s} + \frac{1}{r} \left(\frac{rF}{\Omega L_s} \right)' + \frac{4k_\phi F}{\Delta L_s} + \frac{k_\phi^2 c_s^2 F}{\Delta \omega^2 \Omega L_s L_p} \right] \quad (27)$$

となる。これを B、C のように置き換えると求められる。