

Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式と最大質量

久徳 浩太郎

2024 年 12 月 18 日

通常、星の構造は静水圧平衡を満たす球対称解として記述される。一般相対論において星は状態方程式に応じた最大質量を持つことが知られており、これは Newton 重力との最も顕著な違いと言えるだろう。ここでは、一般相対論的な静水圧平衡が、Newton 重力から何が変更されたために最大質量を持つようになるのか議論する。この議論はよく言っても感覚的なものであり、厳密ではないことを断っておく。

流体の質量密度を ρ 、エネルギー密度を e 、圧力を P とする。定義は場合によるが、半径 r 内部の質量を $m(r)$ で表す。また星の全質量を M 、半径を R と書き、 M/R をコンパクトネスと呼ぶ。なお $G = c = 1$ の単位系を採用する。

球対称な静水圧平衡形状は、Newton 重力では

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho m}{r^2}, \quad (1)$$

$$m(r) := 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \quad (2)$$

に、一般相対論では

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(e + P)(m + 4\pi Pr^3)}{r(r - 2m)}, \quad (3)$$

$$m(r) := 4\pi \int_0^r e r^2 dr \quad (4)$$

に従うものとして定められる。この圧力勾配の式は Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式、通称 TOV 方程式と呼ばれる。

これを見ると、一般相対論によって加わる変更は

1. 重力を感じる受動質量 (passive mass) の変更 : $\rho \rightarrow e + P$
2. 重力を及ぼす能動質量 (active mass) の変更 : $m \rightarrow m + 4\pi Pr^3$ および $dm/dr = 4\pi r^2 \rho \rightarrow 4\pi r^2 e$
3. 力の法則 (force law) の変更 : $1/r^2 \rightarrow 1/[r(r - 2m)]$

の 3 つである、と解釈することは不自然ではなさそうである。これらの変更を個別に考えることで、最大質量をもたらす顕著な効果について示唆を得ることができる。具体的な式を書くと、1. のみ変更した場合は

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(e + P)m}{r^2}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr, \quad (5)$$

2. は

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho(m + 4\pi Pr^2)}{r^2}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r e r^2 dr, \quad (6)$$

3. は

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho m}{r(r-2m)}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \quad (7)$$

となる。もちろんこの切り分けは一意ではなく、例えば能動質量の変更をさらに2つに分けることもできる。また一般相対論での定式化は座標にも依存するため、この議論はあくまで直観的な解釈を容易にするための一つの試みであることを再度断っておく^{*1}。

1 密度一定の厳密解

Newton 重力の場合、質量密度一定の星の圧力分布は

$$P(r) = \rho \frac{M/R - Mr^2/R^3}{2} \quad (8)$$

となり、Lane-Emden 方程式の $n = 0$ の解としても知られている。この解は任意の有限なコンパクトネス M/R に対して矛盾なく存在できる。一般相対論においても、エネルギー密度一定であれば TOV 方程式は解析的に解け、Schwarzschild の内部解

$$P(r) = e \frac{(1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2} - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}} \quad (9)$$

としてよく知られている。この中心密度

$$P_c = P(0) = e \frac{1 - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - 1} \quad (10)$$

は $M/R = 4/9 \approx 0.44$ で発散し、球対称星の最大コンパクトネスを与えている。これらの密度が一定の流体は、各々の文脈に応じてしばしば非圧縮性流体と呼ばれる。

前述の部分的な変更のみを加えた場合にも、同様の解析解が得られる場合がある。ただし質量密度 ρ とエネルギー密度 e とが混在すると厄介なので、ここでは 1., 2. それぞれ単独での解は導かない。3. の変更を加えた場合は質量密度しか現れず、さらに右辺に圧力も登場しないために容易に計算できる。解くと

$$P(r) = \frac{\rho}{4} \ln \left(\frac{1 - 2Mr^2/R^3}{1 - 2M/R} \right) \quad (11)$$

が得られ、中心密度が発散する $M/R = 1/2$ が上限のコンパクトネスを与える。ブラックホールが生じているだけと言えはそれまでだが、力の法則の変更のみで完全に一般相対論的な場合と大差ない状況が実現されることがわかる。

1., 2. の変更を両方とも加えた場合、式は

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(e + P)(m + 4\pi Pr^3)}{r^2}, \quad m = 4\pi \int_0^r e r^2 dr \quad (12)$$

となる。解は

$$P(r) = e \frac{\exp[(M/R)(1 - r^2/R^2)] - 1}{3 - \exp[M/R(1 - r^2/R^2)]} \quad (13)$$

^{*1} とはいえ関連した状況として、一様等方宇宙の膨張の加速度も、上記の能動質量と類似の $e + 3P$ によって与えられる。Schutz の教科書ではこれを active gravitational mass と呼んでいる。一方、流体方程式を（特殊）相対論的に一般化すると、慣性質量（密度）はエンタルピー（密度） $e + P$ に変更されるというのは自然な見方で、これは弱い等価原理の元に受動質量と対応しているとみなしうる。

となり、中心密度が発散するのは $M/R = \ln 3 \approx 1.1$ のときである。受動・能動の 2 つの質量の変更を組み合わせても力の法則の変更ほどの影響はないと解釈でき、自ずからいずれの変更も力の法則ほどの効果は及ぼさないことが推測される。

解釈が変則的になるが、圧力勾配の式においては 1. の変更を加え、さらに質量の定義においてのみ 2. の変更を加える

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(e + P)m}{r^2}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r er^2 dr \quad (14)$$

も考えることができる。これを解くと

$$P(r) = e \left\{ \exp \left[\frac{M}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] - 1 \right\} \quad (15)$$

が得られ、これは有限のコンパクトネスでは発散しない。質量の定義の変更は重力を強める方向に働くので、受動質量の変更は非圧縮性流体の星に最大質量をもたらすほどの影響を持たないと言えるだろう。

同様に、圧力勾配の式においては 2. の変更を加え、一方で質量の定義は変更しない

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho(m + 4\pi Pr^3)}{r^2}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \quad (16)$$

も考えることができる。この解は

$$P(r) = \frac{\rho}{3} \left\{ \exp \left[\frac{3M}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] - 1 \right\} \quad (17)$$

となり、やはり有限のコンパクトネスでは発散しない。質量の定義を変更しなかったので微妙なところだが、能動質量の変更もやはり非圧縮性流体の星に最大質量をもたらすほどの影響はなさそうである。

2 ポリトロープの数値解

より現実的な状況に近いポリトロープ $P = K\rho^{1+1/n}$ で、1., 2., 3. がそれぞれどの程度の影響をもたらすか、中心密度で特徴づけられる 1 パラメータ族として得られる星の系列が示す質量-半径関係によって確認してみる。詳細は省略するが、全ての物理量を K によって規格化することができるため K の値は議論の本筋に影響せず、重要なのはポリトロープ指数 n だけである。以下、この規格化を施した半径および質量を示す。

まずテストとして、非圧縮に近いと思われる $n = 1/10$ のポリトロープを考える。図 1 が様々な方程式の組み合わせを解いて得られる質量-半径関係である。凡例の“TOV”は完全に一般相対論的な TOV 方程式の解、“passive mass”は受動質量のみを変更した 1. の解、“active mass”は能動質量のみを変更した 2. の解、“force law”は力の法則のみを変更した 3. の解、“Newtonian”は Newton 重力での解である。また、式 (12) の解を“(active+passive)”、式 (14) を“(+mass)”、式 (16) を“(-mass)”の細い線で示した。最大質量の星よりも中心密度が高く、重力崩壊に対して不安定な星は示していないので、途中で途切れている線はその方程式に従う星に最大質量があることを表す。これを見ると力の法則の変更は TOV 解に近い結果をもたらし、能動・受動質量を両方変更した式 (12) は最大質量は示すものの影響はやや弱いことがわかる。これは解析解からも想定される傾向である。受動質量・能動質量のいずれかを変更しただけでは最大質量は表れないが、後者の場合には中心密度が高くなると半径が縮まりながらも質量が増え続けることは興味深い。また、式 (16) では最大質量が表れないことは想定通りだが、式 (14) については弱い効果ではあるものの最大質量が表れている。これはエネルギー密度を一定とした解析解では見られなかった振る舞いであるが、今のポリトロープ $n = 1/10$ は

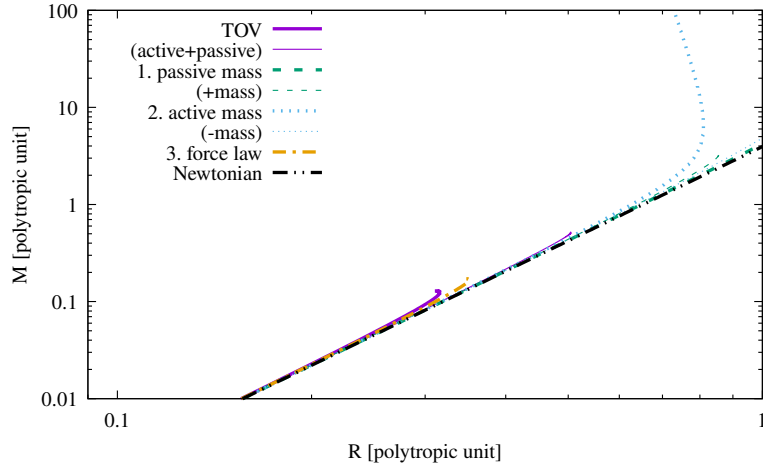


図1 $n = 1/10$ のポリトロップでの結果（両対数で示した）。最大質量の星よりも中心密度が高く、重力崩壊に対して不安定な星は示していない。

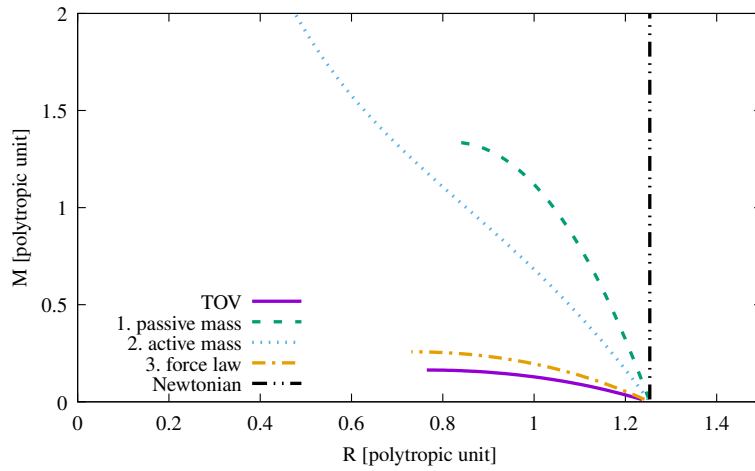


図2 $n = 1$ のポリトロップでの結果。最大質量の星よりも中心密度が高く、重力崩壊に対して不安定な星は示していない。

質量密度での非圧縮を模擬しており、必ずしも対応が完全でないことを注記しておく。いずれにせよ、これらの比較から能動質量よりも受動質量の方が最大質量の存在に寄与することが示唆される。

次に $n = 1$ を考える。これは Newton 重力では解析的に解けて、半径が質量によらず一定値を取るという著しい性質がある。原子核理論に基づいた状態方程式を用いて TOV 方程式を解くことにより得られる中性子星の理論モデルも、しばしば半径が質量にあまり依存しなくなる。そのため、 $n = 1$ のポリトロップは中性子星の大雑把な近似として扱われることがある。結果は図2である。力の法則のみ変更した 3. は TOV 方程式と大差ない結果を導き、最大質量も持つ。受動質量を変更した 1. は、質量-半径関係自体が Newton 重力のものに近いという意味ではあまり影響が見られないが、最大質量が生じるという観点からは大きな影響を示している。逆に能動質量を変更した 2. では、質量-半径関係はやや大きく変わるものの、最大質量は生じないようである。なお、2. で中心密度を上げていくと、いずれ半径をあまり変えないまま質量ばかり増えるようになる。

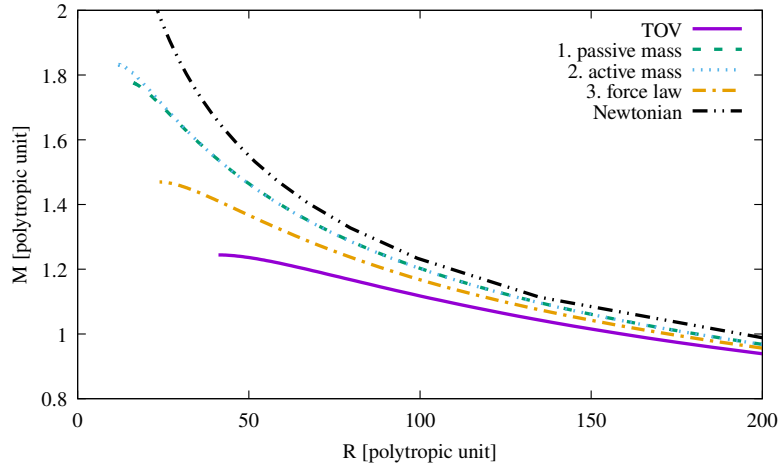


図3 $n = 5/2$ のポリトロップでの結果。最大質量の星よりも中心密度が高く、重力崩壊に対して不安定な星は示していない。

る。これは $n = 1/10$ の場合と同様の振る舞いであり、式 (16) のように $m(r)$ を質量密度で与えるようにすると傾向が変わる。ただし、だからといって最大質量が生じるわけではないようである。

1., 2., 3. いずれの変更も重力を強めることは間違いない。よって、Newton 重力の範疇ですら限界安定だと知られている $n = 3$ に近い星では、いずれの変更によっても星が重力崩壊に対して不安定になると期待される (cf. Chandrasekhar 1964, ApJ 140 417)。これを $n = 5/2$ で確かめた結果が図3であり、いずれの変更によっても確かに最大質量が生じている。この場合はわかりやすく 3., 1., 2. の順に効果が大きいことが示されているように見えるが、よく見るとやはり軽い側では 1. よりも 2. の方が半径が小さくなっている。

3 結論

一般相対論における Newton 重力との顕著な違いとして、状態方程式の詳細によらず球対称平衡星が最大質量を持つ。その違いの最大の要因は力の法則の変更であり、次いで受動質量の変更も一定の影響を持つ。能動質量の変更の影響は弱い、元々が不安定に近い場合は単独でも最大質量を生む。最後にもう一度、この切り分け方は多少なりとも主観的であることを断っておく。